GRONINGEN-NUMMER 1941

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

18e JAARGANG 1941

Nr. 1/2

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,75 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.



Opname Augustus 1941.

Prof. Dr. O. BOTTEMA

geb. 25 December 1901 te Groningen, leraar G. H. B. S. Hengelo (O.) 1924—1930, R. H. B. S. te Groningen 1931—1933, directeur R. H. B. S. te Sappemeer 1933—1935, R. H. B. S. te Deventer 1935—1941, privaat-docent aan de Universiteit te Groningen 1931—1935, docent in de didactiek der wiskunde aan de Universiteit te Leiden 1936—1941, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft in 1941.

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN WIMECOS.

Zooals aan onze leden wel bekend zal zijn, is de Penningmeester der Vereeniging Dr. O. Bottema tot hoogleeraar in Delft benoemd, een feit, waarmede hij ook op deze plaats van harte geluk gewenscht wordt, waarbij wij tevens de hoop uitspreken, dat zijn nieuwe functie hem datgene brengen moge, wat hij er van verwacht. Tevens zij hem hierbij de dank der Vereeniging gebracht voor het vele werk, door hem in het belang der Vereeniging verricht. Wij vertrouwen, dat ook na de aanvaarding van zijn ambt als hoogleeraar zijn belangstelling voor het Wiskundeonderwijs op de Middelbare School niet zal verflauwen en dat wij nog menigmaal van zijn door Groningsche nuchterheid gekenmerkte adviezen zullen mogen profiteeren.

Daar de Penningmeester der Vereeniging in verband met bovenstaande benoeming tot Hoogleeraar de wensch te kennen heeft gegeven, om na afsluiting van het boekjaar op 1 September 1941 van zijn functie ontheven te worden en het aan het Bestuur gewenscht voorkomt, op de a.s. Algemeene Vergadering in de Kerstvacantie in deze vacature te voorzien, zal vanaf die datum de functie van Penningmeester tijdelijk door den Secretaris worden waargenomen. Het Bestuur verzoekt hierbij aan de leden, voor zoover zij dit nog niet hebben gedaan, hun contributie van *f* 2,75 voor 1 November a.s. op de postgirorekening der Vereeniging no. 143917, *Amsterdam*, te willen storten. Er zij hierbij er aan herinnerd, dat in dit bedrag van *f* 2,75 ook het abonnement op Euclides is begrepen. Na 1 November zal eventueel per kwitantie worden beschikt.

Van Vollenhovenstraat 17 B,
Rotterdam (C.).

J. J. Tekelenburg.
Secretaris van Wimecos.

Op verzoek worden hier nogmaals de Statuten en het Huishoudelijk Reglement van Wimecos gepubliceerd:

VEREENIGING: Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-Hoogere-Burgerscholen met 5-/6-jarigen cursus, thans genaamd: Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea, gevestigd te Amsterdam.
(Gewijzigde statuten).

Art. 1. De vereeniging heet: Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea, en is gevestigd te Amsterdam. Haar naam zal afgekort geschreven mogen worden als Wimecos.

Art. 2. De vereeniging is aangegaan voor een tijdvak van 29 jaren, te rekenen van den dag der oprichting, 13 December 1925.

Art. 3. Het doel der vereeniging is aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen, die betrekking hebben op het onderwijs in wiskunde, mechanica en cosmografie aan de in art. 1 genoemde scholen, en eventueel stappen te doen om tot verwezenlijking van de door de leden geuite wenschen, dat onderwijs betreffende, te komen.

Art. 4. De vereeniging tracht haar doel te bereiken langs wettigen weg en wel:

1°. door vergaderingen van de leden;

2°. door het verspreiden van haar meeningen door middel van de pers;

3°. door het nemen van al die wettige maatregelen, die tot het bereiken van het doel wenschelijk geacht worden.

Art. 5. Er wordt jaarlijks ten minste één algemeene ledenvergadering gehouden.

Art. 6. Leden kunnen zijn leeraren of leeraressen in één of meer der in art. 1 genoemde vakken aan één of meer der in art. 1 genoemde scholen of aan daarmee gelijk te stellen onderwijsinrichtingen.

Door het bestuur kunnen ook tot lid worden toegelaten andere personen, op wier lidmaatschap in verband met het doel der vereeniging prijs wordt gesteld.

Art. 7. Om lid te worden, geeft men zich aan het bestuur op. Men houdt op lid te zijn door:

a. een schriftelijke kennisgeving aan het bestuur ten minste één maand vóór het eindigen van het vereenigingsjaar, welk laatste loopt van 1 September tot 31 Augustus;

b. royement, uitgesproken op een algemeene ledenvergadering met ten minste 2/3 der uitgebrachte geldige stemmen, als het voorstel tot royement op de agenda dezer vergadering voorkomt;

c. overlijden.

Art. 8. De leden betalen jaarlijks een bij huishoudelijk reglement vastgestelde contributie.

Art. 9. Het bestuur bestaat uit ten minste 3 leden, uit en door de leden gekozen. De taak, wijze van aftreden en verkiezing van het bestuur worden bij huishoudelijk reglement geregeld.

Art. 10. Het huishoudelijk reglement stelt de rechten en verplichtingen der leden nader vast. Het mag geen bepalingen bevatten, die in strijd met de statuten zijn.

Art. 11. Eereleden zijn zij, die daartoe door de ledenvergadering worden benoemd. Eereleden hebben stemrecht.

Art. 12. Het bestuur vertegenwoordigt de vereeniging in en buiten rechten.

Art. 13. Wijzigingen in de statuten kunnen, behoudens Koninklijke goedkeuring, aangebracht worden op een algemeene ledenvergadering of op een hiertoe opzettelijk bijeengeroepen vergadering, als 2/3 van het aantal uitgebrachte stemmen zich er vóór verklaren en het voorstel tot wijziging op de agenda dier vergadering voorkomt.

Art. 14. De vereeniging wordt ontbonden, als 2/3 van de aanwezige leden op een daartoe belegde vergadering hiertoe besluiten en het voorstel tot ontbinding op de agenda voorkomt. In geval van ontbinding wordt door de algemeene vergadering over de bestemming van een mogelijk batig saldo beslist, met inachtneming van het bepaalde bij art. 1702 van het Burgerlijk Wetboek.

(Volgen de onderteekeningen).

Goedgekeurd bij Koninklijk besluit dd. 30 Maart 1940 n°. 16.

Mij bekend,
De Minister van Justitie,
Namens den Minister,
De Secretaris-Generaal,
v. Angeren.

HUISHOUDELIJK REGLEMENT.

Doel en middelen.

Art. 1. De onderwerpen, die de vereeniging tot bereiking van haar doel in behandeling zal nemen, worden nader omschreven in een werkplan. Het werkplan wordt jaarlijks door het bestuur opgemaakt en door de jaarlijksche ledenvergadering vastgesteld. Het bestuur is bevoegd in de loop van het jaar nieuwe onderwerpen op het werkplan te brengen.

Bestuur.

Art. 2. Aan het bestuur is opgedragen de leiding en vertegenwoordiging van de vereeniging, de afdoening van spoedeischende zaken, het beheer der geldmiddelen en eigendommen der vereeniging en de uitvoering van de besluiten, vastgesteld door de ledenvergadering.

Art. 3. De bestuursleden hebben zitting voor drie jaar; telken jare treedt een bestuurslid af. Het rooster van aftreding wordt de eerste maal door loting vastgesteld. Aftredende bestuursleden zijn terstond herkiesbaar.

Art. 4. Het bestuur stelt voor elke vacature in het bestuur twee candidaten; elk vijftal leden kan voor elke open plaats één candidaat stellen.

Art. 5. De benoeming tot bestuurslid geschiedt met gesloten briefjes en bij volstrekte meerderheid; wordt deze na twee stemmingen niet verkregen, dan heeft herstemming plaats tusschen de beide personen, die bij de tweede stemming de meeste stemmen hebben verkregen. Bij staking van stemmen beslist het lot.

Art. 6. Tusschentijds optredende bestuursleden nemen op de rooster van aftreding de plaats van hun voorgangers in.

Vergaderingen.

Art. 7. Het vereenigingsjaar loopt van 1 Sept. tot 31 Augustus.

Art. 8. De jaarlijksche ledenvergadering, bedoeld in art. 1 van dit reglement, wordt gehouden tusschen 1 September en 15 Januari.

Art. 9. Tenminste vier weken voor de jaarlijksche ledenvergadering deelt de secretaris aan de leden mede, waar en wanneer zij gehouden zal worden, welke bestuursleden na de vergadering zullen aftreden en welke dubbeltallen het bestuur voor de open plaatsen stelt. Wenscht een lid een aangelegenheid onder de agenda opgenomen te zien, dan moet hij dit binnen veertien dagen na

dagteekening van bedoelde mededeeling aan den secretaris berichten. Wenscht een vijftal leden een candidaat te stellen voor een open plaats in het bestuur, dan moet de opgave binnen dezelfde termijn door den secretaris zijn ontvangen.

Art. 10. De secretaris zendt aan alle leden tenminste tien dagen vóór de vergadering een oproeping bevattende de agenda en de namen van alle gestelde candidaten.

Art. 11. Het bestuur brengt in de jaarlijksche ledenvergadering een verslag uit van de lotgevallen en werkzaamheden van de vereeniging.

Art. 12. In de jaarlijksche ledenvergadering wordt de rekening van den penningmeester nagezien door twee leden, door den voorzitter aan te wijzen.

Art. 13. In de jaarlijksche ledenvergadering wordt vastgesteld, waar de volgende jaarlijksche ledenvergadering wordt gehouden.

Art. 14. Het bestuur schrijft een vergadering uit, wanneer het dit wenschelijk acht en binnen drie weken, nadat tenminste tien leden hun wensch daartoe schriftelijk aan het bestuur hebben te kennen gegeven.

Art. 15. De vergaderingen worden geleid door den voorzitter en bij diens ontstentenis door een der andere bestuursleden.

Art. 16. Voorstellen tot wijziging van statuten of huishoudelijk reglement worden niet behandeld, als zij niet op de agenda zijn opgenomen. Geen besluiten worden genomen over punten, welke niet op de agenda voorkomen.

Art. 17. Bij staking van stemmen over zaken is een voorstel verworpen; bij staking van stemmen over personen beslist het lot.

Geldmiddelen.

Art. 18. De contributie voor het volgende vereenigingsjaar wordt telken jare op de jaarlijksche ledenvergadering vastgesteld.

Art 19. De contributie is invorderbaar bij het begin van het vereenigingsjaar. Leden, die in de loop van het jaar toetreden, betalen bij hun toetreding.

Art. 20. Reis- en verblijfkosten door leden van het bestuur ten behoeve der vereeniging gemaakt, worden vergoed.

Algemeene bepalingen.

Art. 21. In gevallen, waarin statuten en huishoudelijk reglement niet voorzien of twijfel overlaten, beslist het bestuur, behoudens verantwoording aan de vergadering.

VACANTIECURSUS WISKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN.

Op 18 April 1941 werd aan de Rijks-Universiteit te Groningen een vacantiecursus Wiskunde gehouden, welke in de eerste plaats bestemd was voor leraren. Het programma was als volgt samengesteld:

1. Dr. J. Popken, *Over het getal* π.
2. Dr. J. C. H. Gerretsen, *Eenvoudige begrippen en resultaten uit de topologie.*
3. Prof. Dr. P. J. van Rhijn, *De rotatie van het melkwegstelsel.*
4. Prof. Dr. J. G. van der Corput, *Elementaire functies door functionaalbetrekkingen gekarakteriseerd.* [1])

Voor deze cursus bleek grote belangstelling te bestaan, het aantal hoorders bedroeg bijna 50. Daarom is besloten om op de ingeslagen weg voort te gaan en ieder jaar in de Paasvacantie een cursus met soortgelijke strekking te organiseren.

Het ligt in de bedoeling om onderwerpen te behandelen die verband houden met de schoolwiskunde, maar dan van een hoger standpunt uit. Ook nevengebieden als theoretische mechanica, theoretische natuurkunde en sterrenkunde zullen, indien daarvoor belangstelling bestaat, aan de orde gesteld worden.

Wensen aangaande te behandelen onderwerpen kunnen te allen tijde bij ondergetekende kenbaar gemaakt worden.

Door de bereidwilligheid van de redactie van „Euclides", waarvoor een woord van dank hier stellig op zijn plaats is, kunnen de op 18 April j.l. gehouden voordrachten in druk verschijnen. Daardoor zijn de deelnemers aan de cursus in de gelegenheid gesteld zich nog eens rustig in het gebodene te verdiepen, terwijl zij die niet aanwezig konden zijn zich een denkbeeld kunnen vormen van een der wijzen waarop aan de samenwerking tussen Hoger en Middelbaar Onderwijs gestalte gegeven kan worden.

J. G. van der Corput.

---

[1]) In deze aflevering is de vertaling in het Engels opgenomen; voortzetting in volgende nummers.

Eerste voordracht.

OVER HET GETAL π[1])

DOOR

J. POPKEN.

Literatuur:

(1) *M. Cantor,* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 deelen, Leipzig 1880.
(2) *Ch. Hermite,* Sur la fonction exponentielle, Oeuvres III, pag. 150—181.
(3) *J. H. Lambert,* Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, Berlin 1770. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Band II, pag. 140—169. Ook afgedrukt bij (8).
(4) ———, Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmétiques. Histoire Acad. roy. des sciences et belles lettres. Berlin. Année 1761 (1768), pag. 265—322.
(5) *F. Lindemann,* Ueber die Zahl π. Mathem. Annalen Bd. 20 (1882), pag. 213—225.
(6) ———, Ueber die Ludolph'sche Zahl, Sitzungsber. preuss. Akad. d. Wissensch. 1882, pag. 679—682.
(7) *J. Popken,* Over de onmeetbaarheid van π, Euclides *17,* 1941; p. 217—227.
(8) *F. Rudio,* Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig 1892.
(9) *J. Tropfke,* Geschichte der Elementarmathematik IV. Die Kreisberechnung, pag. 195—238. 2de druk, Berlin en Leipzig 1923.

Er ligt altijd een bijzondere bekoring in om na te gaan hoe een bepaald probleem in de loop der jaren ontstaan is. Voor sommige problemen is die ontwikkeling hoofdzakelijk van recente datum; ik denk b.v. aan de gelijkverdeeling modulo één. Van andere weer ligt de oorsprong duizenden van jaren terug, zonder dat men zeggen kan, dat het onderzoek er naar reeds afgesloten is. Tot deze laatste categorie behoort de vraag naar de aard van het getal π.

De geschiedenis over het onderzoek naar dit getal is ruwweg te verdeelen in vier perioden: een empirische, een meetkundige, een analytische en een getallentheoretische periode. Ik zal deze perioden hier kort bespreken.

---

[1]) De inhoud van dit artikel komt gedeeltelijk overeen met die van (7) der literatuurlijst.

A. *de empirische periode.* Deze valt ongeveer samen met de bloeitijd der Egyptische en der Babylonische cultuur. In beide groote beschavingen, waartusschen naar het schijnt zoo goed als geen uitwisseling van ideeën bestond, treedt reeds vroeg het vraagstuk op, dat ons hier interesseert. Geen wonder, want de cirkel behoort tot de oudste meetkundige figuren, die ook bij de dagelijksche gebruiksvoorwerpen veelvuldig voorkwam. Het spreekt vanzelf, dat men onder omstandigheden de omtrek of de oppervlakte van zoo'n figuur trachtte te bepalen als b.v. de middellijn gegeven was. Zoo wordt in het z.g. rekenboek van de Egyptenaar *Ahmes*, om de oppervlakte van een gegeven cirkel te bepalen, het voorschrift gegeven deze te vervangen door een vierkant, waarvan de zijde $\frac{8}{9}$ van de middellijn van de cirkel is. Dit levert voor π de waarde $(\frac{16}{9})^2 = 3{,}1605\ldots$ Zooals bijna de geheele wiskundige kennis der Egyptenaren is dit resultaat zoo goed als zeker uit de ervaring afgeleid, maar hoe, dat weet men niet. Wel heeft men de verklaring gegeven, dat deze kwadratuur gevonden is door de inhoud van maten met cirkelvormig en dergelijke met vierkant grondvlak met elkaar te vergelijken.

Gemakkelijker kan men de herkomst vinden van de waarde 3 voor π, die in de Bijbel voorkomt, n.l. daar waar het groote waschvat, de z.g. gegoten zee, bij de tempelbouw door Salomo beschreven wordt. De middellijn wordt 10 ellen genoemd en de omtrek 30 ellen. Deze laatste is blijkbaar niet door directe meting gevonden, maar eenvoudig door de middellijn met 3 te vermenigvuldigen. Men verklaart dit ongedwongen door aan te nemen, dat de waarde 3 voor π uit het naburige en cultureel invloedrijke Babylon stamt. Inderdaad is 3 de gebruikelijke waarde voor π, die in de Babylonische berekeningen optreedt. Men heeft deze nogal ruwe rectificatie van de cirkel wel in verband gebracht met het vaststaande feit, dat het de Babyloniërs bekend was, dat de straal zes maal op de omtrek als koorde is af te passen.

B. *De meetkundige periode.* De Grieken maakten van de wiskunde, die tot nu toe een verzameling van empirische wetten was, een werkelijke wetenschap. Zoo goed als zeker leerden ze het probleem van de kwadratuur van de cirkel van de Egyptenaren. Het vraagstuk werd echter door hen op een veel hooger plan gebracht.

In de eerste plaats probeerde men bij een gegeven cirkel een

vierkant met even groot oppervlak met passer en lineaal te construeeren. Sindsdien hebben honderden mathematici en een onafzienbare rij van dilettanten zich met dit vraagstuk beziggehouden. Ja, tot op de huidige dag verschijnen nog steeds geschriften, waarin dit probleem zoogenaamd wordt opgelost. Het probleem dankt zijn populariteit mede aan de eenvoudige formuleering, die voor iedereen begrijpelijk is. Ik zal U niet vermoeien door een opsomming van de onderzoekingen op dit gebied te geven. In plaats daarvan zal ik alleen de allerbelangrijkste noemen.

Reeds in ongeveer 430 v. Chr. brengt *Antiphon* de cirkel in verband met de ingeschreven regelmatige veelhoek. Hij construeert eerst b.v. het ingeschreven kwadraat. Door herhaalde verdubbeling van de zijden komt hij tot een veelhoek, die niet meer van een cirkel te onderscheiden is en nu beroept hij zich op een elementaire methode, die leert hoe een gegeven veelhoek in een even groot vierkant te veranderen. Daarmee was volgens hem het probleem opgelost. Na hem beschouwden andere wiskundigen ook de omgeschreven veelhoeken.

Men paste ook andere methoden toe, soms op zeer scherpzinnige wijze, maar geen van deze pogingen bracht de oplossing ook maar één stap naderbij. Daarom ontstond onder de mathematici een groep, die er bewust naar streefde om π bij benadering uit te drukken. Hoog boven allen uit rijst hier de figuur van *Archimedes.* Hij blies de onderzoekingen van *Antiphon* en diens navolgers nieuw leven in. Zoo vond hij, met de methode, die nog in onze leerboeken voorkomt, dat π ligt tusschen de beide grenzen $3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$ en $3\frac{10}{71} = 3{,}1408\ldots$ Men moet over deze resultaten niet licht denken, want de Grieksche schrijfwijze der getallen leende zich zeer slecht voor numerieke berekeningen. Vooral de waarde $3\frac{1}{7}$, die tegelijkertijd én eenvoudig én nauwkeurig is, werd weldra algemeen bekend; ze maakte een triomftocht van land tot land en schijnt zelfs tot in China doorgedrongen te zijn. Vakmathematici beproefden meestal aan deze grenzen van *Archimedes* nieuw gevonden waarden van π. Lagen die daarbuiten, dan kon men ze zonder meer verwerpen.

In de middeleeuwen zonk de kennis van de wiskunde erg diep. Merkwaardig is, dat toen allerlei oude waarden voor π, zooals de Egyptische $(\frac{16}{9})^2$, weer opdoken. Heel vaak werd $3\frac{1}{7}$ voor de juiste waarde van π gehouden. Een klein staaltje van de toenmalige

stand van de kennis der wiskunde: ongeveer in het jaar 1000 richt *Adelbold van Utrecht* een brief aan Paus *Sylvester,* die als wiskundige ook onder de naam *Gerbert* bekend geworden is. Hierin vraagt hij hoe het komt, dat bij verdubbeling van de middellijn van een bol, het volume 8-maal zoo groot wordt. Als voorbeeld berekent hij twee gevallen, volgens het voorschrift $\frac{11}{21}$ d^3 met $d = 7$ en $d = 14$. Ook bij kuben en andere lichamen had hij analoge wonderbaarlijke verschijnselen waargenomen!

Eerst aan het einde van de renaissance werd op het gebied van de kwadratuur van de cirkel nieuwe vooruitgang geboekt. Op de door *Archimedes* gelegde fundamenten werd verder gebouwd. Nu had men door de invoering van de Arabische cijfers en later door die der tiendeelige breuken de beschikking over een apparaat voor de numerieke berekeningen, dat onvergelijkbaar veel beter was dan de Grieksche schrijfwijze der getallen. Het waren vooral Nederlanders, die in deze richting met groot succes werkzaam waren. Ik noem *Metius, Van Roomen* en *Ludolph van Ceulen,* die zelfs 35 decimalen van π berekend moet hebben. Hoogerstaand werk verrichtten echter *Snellius* en vooral *Huygens,* die de methoden van *Archimedes* aanzienlijk wisten te verscherpen.

Dat op dit gebied nog nieuwe resultaten te verkrijgen zijn, blijkt wel uit een serie artikels van Prof. *Schuh.*

C. *De analytische periode.* Intusschen had de analyse een enorme ontwikkeling doorgemaakt en het duurde dan ook niet lang of de nieuwe en uiterst krachtige strijdmiddelen uit het arsenaal van de jonge wetenschap werden gebruikt om de tot nu toe onneembare vesting van de cirkelkwadratuur te bestormen.

Reeds *Vieta* vond een analytische uitdrukking voor π, n.l. het oneindige product

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \cdot \cdot$$

Eerst veel later volgden analoge ontdekkingen. Ik noem b.v. de formule van *Wallis*

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3^2 . 5^2 . 7^2 . 9^2 \ldots}{2 . 4^2 . 6^2 . 8^2 \ldots}$$

en de kettingbreuk van *Brouncker*

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}$$

Voor een snelle berekening van π waren deze formules echter minder geschikt. Van het grootste gewicht was evenwel de ontdekking van de reeksontwikkeling

$$\text{bg tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots$$

door *Gregory*. Voor $x = 1$ volgt hieruit de z.g. reeks van *Leibniz*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Door de buitengewoon langzame convergentie is deze reeks zonder meer niet voor een werkelijke berekening van π bruikbaar. *Newton* paste daarom de bg sin-reeks toe om π in 14 decimalen te berekenen. Later wist men echter de bg tg-reeks zoo om te vormen, dat ze toch bruikbaar werd. Eén der middelen daartoe gaf de Engelsche astronoom *Machin* aan de hand. Hij ging uit van de formule

$$\text{bg tg } x + \text{bg tg } y = \text{bg tg } \frac{x + y}{1 - xy}$$

en bewees daarmee de betrekking

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ bg tg } \frac{1}{5} - \text{bg tg } \frac{1}{239}$$

De afleiding hiervan is niet moeilijk. Immers is

$$2 \text{ bg tg } \frac{1}{5} = \text{bg tg } \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \text{bg tg } \frac{5}{12},$$

$$4 \text{ bg tg } \frac{1}{5} = \text{bg tg } \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \text{bg tg } \frac{120}{119},$$

$$4 \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{120}{119} - \operatorname{bg} \operatorname{tg} 1 =$$

$$= \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{1}{239},$$

waaruit de te bewijzen betrekking onmiddellijk volgt.

Nu zijn bg tg $\frac{1}{5}$ en bg tg $\frac{1}{239}$ in behoorlijk snel convergente reeksen uit te drukken:

$$\operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots$$

$$\operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots$$

en het berekenen van een aantal decimalen van π levert geen enkele moeilijkheid meer op.

Een groot aantal mathematici heeft zich met dergelijke methoden beijverd om de decimaalontwikkeling van π zoo ver mogelijk voort te zetten. Ik noemde *Newton* reeds; ook *Euler* heeft zich met dit vraagstuk bezig gehouden. Ja, zelfs heeft men voor dit doel gebruik gemaakt van de diensten van de rekenkunstenaar *Zacharias Dase,* die in de recordtijd van twee maanden 200 decimalen leverde. Het verst kwam echter *Shanks,* die 707 decimalen vond. Merkwaardig is dat in deze decimaalcijfers een eigenaardige afwijking aan de dag treedt; het cijfer 7 treedt daarin n.l. veel minder vaak op dan de overige negen cijfers.

D. *De getallentheoretische periode.* Wel had men geleerd om zooveel decimalen van π te berekenen als men zelf wilde, wel kende men tal van analytische uitdrukkingen voor π, maar toch wist men van het karakter van het getal π niets af. Het probleem van de kwadratuur van de cirkel stond nog even onaantastbaar als tevoren. Wel vermoedde men reeds lang, dat π onmeetbaar was en dat de kwadratuur van de cirkel met passer en lineaal onmogelijk was. Zelfs meende *Leibniz* stellig, dat hij een bewijs voor de irrationaliteit van π bezat en *Gregory* probeerde reeds de onmogelijkheid van de kwadratuur van de cirkel te bewijzen.

Het eerste en tot nu toe ook het meest eenvoudige bewijs voor de onmeetbaarheid van π leverde *Lambert* in twee artikels, resp. van

1766 en 1767. Het eerste „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen" [2]) richt zich vooral tot de vele „kwadrateurs" van die dagen en is populair gehouden. Het tweede [3]) is meer wetenschappelijk en treft door de strenge behandeling van het probleem. Voor het bewijs stelt *Lambert* de naar hem genoemde kettingbreuk

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{3x-\cfrac{1}{5x-\cfrac{1}{7x-\dots}}}}$$

op en maakt verder gebruik van $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Aan het eind van deze voordracht zal ik hetzelfde bewijs geven, echter zonder gebruik van de theorie der kettingbreuken te maken [4]).

Belangrijk is de wijze waarop *Lambert* tot dit bewijs kwam, omdat meer dan een eeuw later, maar nu bij het bewijs van de transcendentie van π, zich een analoog geval zou voordoen. *Euler* had reeds vroeger de kettingbreukontwikkeling

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\dots}}}}$$

opgesteld en daarmee impliciet bewezen, dat e onmeetbaar is. Nu wist *Lambert* bovendien, dat er tusschen e en π een relatie bestond. Immers *Euler* had tevens ontdekt, dat $e^{\pi i}=-1$ is en algemeener, dat de exponentieele functie e^x en de trigonometrische functies eng met elkaar samenhangen. Dit bracht *Lambert* er toe om de kettingbreukontwikkeling van *Euler* uit te breiden en zoo kwam hij tot

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\cfrac{1}{2x+\cfrac{1}{6x+\cfrac{1}{10x+\cfrac{1}{14x+\dots}}}}$$

en tenslotte tot zijn kettingbreukontwikkeling voor $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

---

[2]) Vgl. (3) van de literatuurlijst.
[3]) Vgl. (4) van de genoemde lijst.
[4]) Het hier bedoelde bewijs is in dit artikel weggelaten, omdat het reeds in (7) van de literatuurlijst uitvoerig behandeld is.

Na *Lambert* duurde het echter nog meer dan een eeuw voor het vraagstuk van de kwadratuur van de cirkel tot een oplossing gebracht werd. Reeds vroeg had men ingezien, dat elke grootheid, die met passer en lineaal te construeeren is, noodzakelijk algebraïsch moet zijn, d.w.z. voldoen moet aan een algebraïsche vergelijking met geheele coëfficiënten. *Euler* had het vermoeden reeds uitgesproken, dat π niet-algebraïsch zou zijn.

Nu was van deze niet-algebraïsche of korter transcendente getallen heel weinig bekend. *Liouville* had wel de existentie van zulke getallen aangetoond, maar de getallen, die *Liouville* construeerde waren van een zeer bijzondere soort. Verder hadden de onderzoekingen van *Cantor* geleerd, dat een getal — om het populair uit te drukken — slechts bij uitzondering algebraïsch kon zijn, maar verder wist men niets. Toen kwam plotseling in 1873 *Hermite* met een geniaal bewijs, waarin hij de transcendentie van het getal e aantoonde. Negen jaar later gelukte het daarop aan *Lindemann* om met dezelfde methoden en met behulp van de relatie $e^{\pi i} = -1$ de transcendentie van π te bewijzen.

Zoo was tenslotte een probleem, waaraan de menschheid zoo ontzaggelijk veel moeite heeft besteed, opgehelderd. Toch was hiermee het onderzoek niet afgesloten; men streefde er naar zooveel mogelijk over het karakter van het getal π te weten te komen. Op de voorgrond staat bij deze onderzoekingen het begrip „transcendentiemaat", maar een bespreking van deze vragen zou mij te veel tijd kosten.

Tweede Voordracht.

EENVOUDIGE BEGRIPPEN EN RESULTATEN UIT DE TOPOLOGIE

DOOR

J. C. H. GERRETSEN.

In het jaar 1758 zijn te Petersburg een tweetal van Euler afkomstige verhandelingen gedrukt, waarin onderzocht wordt, op welke grondslagen een klassificatie van polyeders verkregen kan worden. In de eerste van deze verhandelingen wordt de beroemde thans naar Euler genoemde stelling meegedeeld.[1]) Deze stelling, welke in vrijwel ieder leerboek der stereometrie is te vinden, spreekt uit *dat de som van de aantallen hoekpunten en zijvlakken van een polyeder het aantal ribben met 2 overtreft.* We kunnen de stelling van Euler aldus in een formule weergeven:

$$h + z = r + 2, \quad (1)$$

als we met h aanduiden het aantal hoekpunten, met z het aantal zijvlakken en met r het aantal ribben.

Het bewijs van deze stelling heeft Euler blijkbaar enige moeite veroorzaakt, het resultaat wordt zonder bewijs meegedeeld. Pas in de tweede verhandeling wordt de leemte aangevuld.

Van het feit, dat de stelling reeds een eeuw vroeger door Descartes is gevonden, was Euler niet op de hoogte, hij maakt er althans geen melding van. Trouwens, het manuscript van Descartes is verloren gegaan. Men kent daarvan echter wel de

---

[1]) L. Euler, *Elementa doctrinae solidorum,* Nova Comm. Ac. Petrop., 4 (1758), 109—140 en
Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, Id., 140—160.
Bij Euler wordt bedoelde stelling op p. 135 aldus geformuleerd: „In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrorum binario exedit numerum acierum."

inhoud, omdat door Leibniz een, zij het onvolledige, copie is gemaakt, die pas in 1860 is gepubliceerd.

Het polyederbegrip bij Euler kunnen we thans nog in onze schoolboeken terugvinden. Onder een polyeder of veelvlakkig lichaam, kortweg veelvlak, wordt veelal verstaan een samenhangend zich niet naar het oneindige uitstrekkend deel van de ruimte begrensd door eindig vele veelhoeken. Daarbij wordt een veelhoek beschouwd als een samenhangend zich niet naar het oneindige uitstrekkend deel van het platte vlak begrensd door eindig vele lijnsegmenten.

De formule van Euler heeft bij de wiskundigen een levendige belangstelling gewekt, vooral ook omdat het bleek, dat de formule geen algemene geldigheid bezit.

Zeer uitvoerig heeft de wiskundige Lhuilier zich bezig gehouden met de vraag naar de indeling van de uitzonderingsgevallen in klassen en naar de voorwaarden, waaraan een polyeder moet voldoen om de geldigheid van de formule te waarborgen.

Een voldoende voorwaarde voor de geldigheid is aanwezig, wanneer het lichaam *convex* is, d.w.z. met ieder tweetal punten ook het daardoor bepaalde lijnsegment geheel bevat.

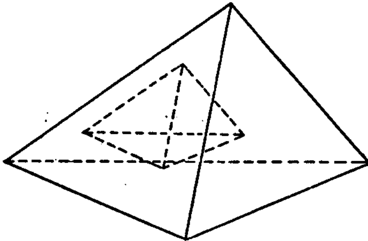


Fig. 1.

Door Lhuilier zijn een drietal typen van „niet-Eulerse" polyeders onderscheiden:

a. Veelvlakken, die in hun binnenste één of meer holten bevatten. Als voorbeeld nemen we een viervlak, waaruit een kleiner viervlak is weggenomen, (fig. 1). Voor dit polyeder geldt:

$$h - r + z = 8 - 12 + 8 = 4. \qquad (2)$$

b. Veelvlakken, die één of meer kanalen bevatten. Als voorbeeld

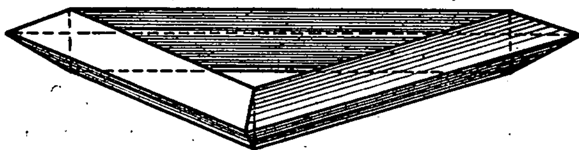


Fig. 2.

kunnen we nemen een lijst opgebouwd uit drie afgeknotte driezijdige prisma's, (fig. 2). We vinden in dit geval:

(3) $$h - r + z = 9 - 18 + 9 = 0.$$

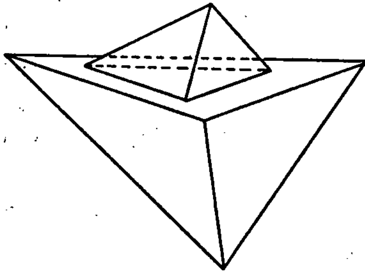


Fig. 3.

c. Veelvlakken, waarbij in de begrenzing één of meer ringvormige veelhoeken optreden. Een voorbeeld wordt gegeven door een viervlak, waartegen een kleiner viervlak geplaatst is, (fig. 3). In dit geval geldt:

(4) $h - r + z = 8 - 12 + 7 = 3.$

Het spreekt vanzelf dat de opgesomde bizonderheden ook gecombineerd kunnen optreden.

Na de ontdekking van de meerdimensionale meetkunde behoorde natuurlijk de uitbreiding van de formule van Euler op de analoga van polyeders in ruimten met meer dan drie afmetingen, de z.g. *polytopen,* tot de voor de hand liggende opgaven. Overeenkomstig de reeds gegeven definitie van polyeder kunnen we onder een $(n + 1)$-dimensionaal polytoop verstaan een zich niet naar het oneindige uitstrekkend samenhangend deel van een $(n + 1)$-dimensionale ruimte, begrensd door eindig vele n-dimensionale polytopen.

Voor deze figuren is een merkwaardig en fraai resultaat gevonden door Schäfli, dat stellig juist is, wanneer we aan het polytoop de eis van convexheid stellen. De stelling van Schäfli luidt aldus: *Is* α_ν, $(\nu = 0, \ldots, n)$, *het aantal* ν*-dimensionale polytopen in de begrenzing van het* $(n + 1)$*-dimensionale polytoop, dan geldt:*

(5) $$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \alpha_\nu = 1 + (-1)^n.$$

Voor $n = 0$ vinden we:

(6) $$\alpha_0 = 2,$$

hetgeen betekent, dat een 1-dimensionaal convex polytoop, dat is niets anders dan een lijnsegment, twee eindpunten heeft.

Voor $n = 1$ geldt:

(7) $$\alpha_0 - \alpha_1 = 0,$$

m.a.w. bij een convexe veelhoek is het aantal hoekpunten gelijk aan

het aantal zijden, een resultaat dat overigens ook voor niet-convexe gesloten veelhoeken geldt.

Voor $n = 2$ vinden we:

(8) $$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

de formule van E u l e r.

Nemen we $n = 3$, dan geldt:

(9) $$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Deze formule wordt op indrukwekkende wijze geïllustreerd door de regelmatige 120-cel; dit polytoop bezit 600 hoekpunten, 1200 ribben, 720 zijvlakken (regelmatige vijfhoeken) en 120 zijruimten (regelmatige twaalfvlakken). Inderdaad is

$$600 - 1200 + 720 - 120 = 0.$$

De uitzonderingen op de gegeneraliseerde formule van E u l e r zijn in de ruimten met meer dan drie afmetingen lastig te overzien en het is moeilijk daarvan een bevredigende klassificatie te geven op de grondslag van de vage definities van polyeder en polytoop, waarmede we ons tot nu toe tevreden hebben gesteld.

Het is niet mijn bedoeling U volledig in te lichten over de definitieve resultaten, die men op dit terrein dank zij het werk van R i e m a n n, B e t t i en P o i n c a r é heeft verkregen. Wel zal ik iets meedelen over de wegen, die men heeft moeten inslaan om de moeilijkheden de baas te worden.

We beperken ons weer eerst tot de polyeders in de R_3, de 3-dimensionale Euklidische ruimte. Een beter inzicht in de polyedertheorie kan verkregen worden, *wanneer men alleen let op de begrenzing van een lichaam* en het door deze begrenzing omsloten deel van de ruimte als irrelevant ter zijde laat. *Een polyeder beschouwen we veeleer als een systeem van eindig vele vlakke veelhoeken,* die op een bepaalde manier tot elkaar in relatie staan. Wanneer we bij het gewijzigde gezichtspunt de eis van samenhang voegen, vervalt reeds dadelijk het eerste als uitzondering op de stelling van E u l e r gegeven voorbeeld, dat in fig. 1 afgebeeld is. Immers de begrenzing valt in twee stukken uiteen, die ieder afzonderlijk als polyeder beschouwd kunnen worden. Voor de afzonderlijke delen geldt in dit geval de formule van E u l e r wel.

Het blijkt verder gewenst te zijn om een polyeder opgebouwd te denken uit driehoeken, waarbij het niet hindert dat twee of meer

aanliggende driehoeken tot een zelfde plat vlak behoren. Het in fig. 3 afgebeelde polyeder bevat een ringvormige veelhoek, die we in gewone vierhoeken kunnen verdelen. Elke vierhoek valt door een diagonaal uiteen in twee driehoeken, (fig. 4). Aldus verkrijgen we een polyeder dat uit louter driehoeken is opgebouwd. Daarvoor geldt:

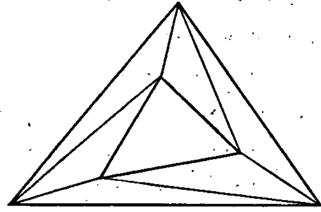


Fig. 4.

$$(10) \qquad \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 8 - 18 + 12 = 2.$$

zodat nu de relatie van E u l e r wel juist is.

Voor het in fig. 2 afgebeelde polyeder helpt deze procedure ons niet; wanneer we de zijvlakken door diagonalen in driehoeken verdelen, blijft de afwijking bestaan, want we vinden:

$$(11) \qquad \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 9 - 27 + 18 = 0.$$

Hier moet dus nog een andere omstandigheid in het spel zijn.

Een opmerking van fundamenteel belang is de volgende: *de formule van* E u l e r *bezit geen metrisch karakter* en is zelfs niet gebonden aan de rechtlijnigheid van de samenstellende veelhoeken. Het is intuïtief volkomen duidelijk dat een geleidelijke vervorming van het polyeder in een gebogen figuur geen invloed heeft op de getallenrelatie tussen de aantallen hoekpunten, ribben en zijvlakken, wanneer men ook gebogen ribben en zijvlakken toelaat. Men kan bijvoorbeeld de verificatie verrichten aan een boloppervlak dat in 8 driehoeken verdeeld wordt, wanneer men een ingeschreven regelmatig octaeder uit het middelpunt op het boloppervlak projecteert.

Hierbij rijst al dadelijk het probleem om het begrip geleidelijke vervorming nauwkeurig te omschrijven. We komen daarmee in aanraking met een betrekkelijk jonge, doch uiterst belangrijke wetenschap, de *topologie,* soms ook wel genoemd *analysis situs.* [2])

De klassieke stereometrie is de wetenschap van figuren, die in de aanschouwingsruimte gedefinieerd zijn. Als gevolg van de grote

---

[2]) De thans meer in gebruik zijnde naam topologie is ingevoerd door J. B. L i s t i n g, *Vorstudien zur Topologie,* Göttingen 1848. De term analysis situs werd door L e i b n i z gebruikt in een brief aan H u y g e n s. Verg. G. W. L e i b n i z, *Mathematische Schriften* (herausgegeben von C. J. G e r h a r d t), 2, London—Berlin 1850, 17—25.

ontdekkingen na 1800 heeft het ruimtebegrip een belangrijke evolutie doorgemaakt en ingrijpende wijzigingen ondergaan.

De stoot werd gegeven door de ontdekking van het *dualiteitsbeginsel* door Poncelet en Gergonne. Daarmee werd het inzicht verkregen, dat vele eigenschappen in de meetkunde hun geldigheid behouden, wanneer men de begrippen punt en vlak verwisselt en dienovereenkomstig de noodzakelijke veranderingen in de formulering van de stellingen aanbrengt.

De gedachte om in de plaats van punten andere figuren te nemen voor de opbouw van een ruimte in een minder beperkte betekenis is in volle duidelijkheid door Plücker naar voren gebracht in zijn klassieke onderzoekingen in de *stralenmeetkunde.*

De ontwikkeling van de *niet-Euklidische meetkunde* gewende de wiskundigen aan het denkbeeld, dat het zin heeft meetkunde te beoefenen in ruimten, die een geheel andere structuur dan de aanschouwingsruimte bezitten.

De ras opeenvolgende ontdekkingen in de *analyse* en de *leer van de puntverzamelingen* deden met steeds grotere klaarheid een nieuw gezichtspunt in al deze theorieën naar voren komen. *Een figuur en een ruimte als drager van figuren wordt meer en meer louter tot een verzameling van bepaalde dingen, waarvan de individuele aard betrekkelijk onverschillig is.* Essentieel zijn slechts zekere relaties tussen die dingen.

In volle scherpte treedt dit standpunt op bij het *abstracte ruimtebegrip,* zoals dit door Fréchet is geschapen.

De topologie heeft de uit deze ontwikkeling voortvloeiende consequenties volledig aanvaard. Voor de topoloog is een ruimte niets anders dan een verzameling van wel-omschreven dingen, welke zodanig tot elkaar in relatie staan, dat het mogelijk is het begrip *continue afbeelding* te definieren.

We willen hieraan enige aandacht wijden. Onder een *éénduidige afbeelding* f van een (niet lege) verzameling $\mathfrak{M}$ *in* een verzameling $\mathfrak{N}$ wordt verstaan een voorschrift, dat aan ieder element A van $\mathfrak{M}$ één en slechts één element $A' = f(A)$ van $\mathfrak{N}$ toevoegt. Het element A' heet het *beeld* van A, terwijl A *een origineel* van A' heet voor de afbeelding f. Is $\mathfrak{N}$ een getallenverzameling, dan zegt men dat door het voorschrift op $\mathfrak{M}$ een éénduidige functie is gedefinieerd met waardenverzameling $\mathfrak{N}$.

Men spreekt van een afbeelding van $\mathfrak{M}$ *op* $\mathfrak{N}$, wanneer ieder

element van $\mathfrak{N}$ als beeld optreedt. Het origineel kan aan het beeld toegevoegd worden, wanneer bij ieder beeld slechts één origineel behoort. De aldus verkregen afbeelding van de verzameling $\mathfrak{M}'$ der beeldelementen op de verzameling $\mathfrak{M}$ heet de *inverse afbeelding* van f en wordt vaak met f^{-1} aangeduid. De afbeelding f heet dan *omkeerbaar éénduidig.*

Een continue afbeelding voegt aan naburige elementen van $\mathfrak{M}$ naburige elementen van $\mathfrak{N}$ toe. Een dergelijke formulering mist nog alle scherpte. Deze wordt verkregen wanneer men het begrip *omgeving* invoert.

Men zegt *dat in $\mathfrak{M}$ een omgevingsbegrip is gedefinieerd,* wanneer op grond van een zeker voorschrift bij ieder element van $\mathfrak{M}$ bepaalde deelverzamelingen van $\mathfrak{M}$ als omgevingen van dat element aangewezen zijn. Daarbij moeten de volgende postulaten vervuld zijn:

1°: Is $\mathfrak{U}(A)$ een omgeving van A, dan behoort A tot $\mathfrak{U}(A)$.

2°. Een deelverzameling $\mathfrak{B}$ van $\mathfrak{M}$, die $\mathfrak{U}(A)$ geheel bevat, is eveneens een omgeving van A.

Een verzameling $\mathfrak{M}$, waarin een omgevingsbegrip gedefinieerd is, heet een *omgevingsruimte.* De elementen van $\mathfrak{M}$ heten *punten.*

Voorbeelden van omgevingsruimten zijn gemakkelijk te geven. Als eerste voorbeeld noemen we de aanschouwingsruimte van de stereometrie. Een deelverzameling $\mathfrak{U}$ van de ruimte heet omgeving van een punt A, wanneer er een positief getal ϱ bestaat zodanig, dat tot $\mathfrak{U}$ alle punten behoren, welke een afstand $< \varrho$ tot A bezitten. Blijkbaar is aan de bovengenoemde omgevingspostulaten voldaan. In het bizonder is dus de verzameling van alle punten, die een afstand $< \varrho$ tot A bezitten een omgeving van A; een dergelijke omgeving wordt een ϱ-omgeving van A genoemd.

Een ander voorbeeld is het volgende. Zij $\mathfrak{A}$ een niet lege deelverzameling van de omgevingsruimte $\mathfrak{M}$. Is A een punt van $\mathfrak{A}$, dan heet de doorsnede $\mathfrak{U}_{\mathfrak{A}}(A)$ van $\mathfrak{U}$ met een omgeving $\mathfrak{U}(A)$ van A in $\mathfrak{M}$ een omgeving van A in $\mathfrak{A}$. Ook nu bewijst men gemakkelijk, dat aan de omgevingspostulaten voldaan is. *Iedere niet lege deelverzameling van een omgevingsruimte is dus eveneens een omgevingsruimte.*

Het is nu niet moeilijk meer om aan het begrip continue afbeelding een duidelijk omschreven betekenis te hechten. *De afbeelding f van de omgevingsruimte $\mathfrak{M}$ in de omgevingsruimte $\mathfrak{N}$ heet continu in het punt A van $\mathfrak{M}$, wanneer bij een willekeurige omgeving $\mathfrak{U}'(A')$*

van $A' = f\ (A)$ in $\mathfrak{N}$ een omgeving $\mathfrak{U}\ (A)$ in $\mathfrak{M}$ gevonden kan worden, die als deelverzameling van $\mathfrak{U}'\ (A')$ afgebeeld wordt. Is de afbeelding f continu in ieder punt van $\mathfrak{M}$ dan heet f continu zonder meer.

We hebben hiermee een generalisering verkregen van het begrip continue functie uit de elementaire analyse. Immers, zij $\mathfrak{M}$ een verzameling van reële getallen, die we representeren als een verzameling van punten op een x-as. Een functie f beeldt deze punten éénduidig af op punten, die tot een y-as behoren, die we, zoals gebruikelijk, loodrecht op de x-as aangenomen denken. De functie is in het punt a continu, wanneer er bij een willekeurig gekozen positief getal ε een getal δ gevonden kan worden zodanig, dat alle punten van $\mathfrak{M}$, die behoren tot de δ-omgeving:

$$a - \delta < x < a + \delta$$

door f afgebeeld worden als punten behorende tot de ε-omgeving:

$$f(a) - \varepsilon < y < f(a) + \varepsilon$$

van het punt $f\ (a)$ op de y-as, (fig. 5).

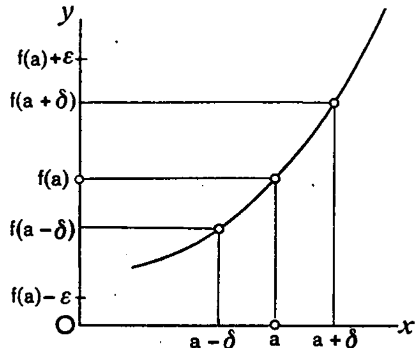


Fig. 5.

Een afbeelding f van de omgevingsruimte $\mathfrak{M}$ in de omgevingsruimte $\mathfrak{N}$ heet *topologisch,* wanneer f omkeerbaar éénduidig is en bovendien omkeerbaar continu, d.w.z. de afbeelding f is evenals de inverse f^{-1} continu. De ruimte $\mathfrak{M}$ en de ruimte $\mathfrak{M}'$ van de beeldpunten der punten van $\mathfrak{M}$ heten in dit geval *homoiomorf.*

Voorbeelden van topologische afbeeldingen liggen voor het grijpen. De centrale projectie van een regelmatig octaeder uit het middelpunt op het oppervlak van de omgeschreven bol is topologisch. Algemeen kan men bewijzen: *de begrenzing van een convexe puntverzameling $\mathfrak{C}$ gelegen in een $(n + 1)$-dimensionale Euklidische ruimte* (en niet reeds in een Euklidische ruimte met dimensie $< n + 1$) *is homoiomorf met een n-dimensionale sfeer.* Men verstaat onder de *begrenzing* van de puntverzameling $\mathfrak{C}$ de verzameling van alle punten, waarvan iedere omgeving zowel punten van $\mathfrak{C}$ als niet tot $\mathfrak{C}$ behorende punten bevat. Een *n-dimensionale sfeer* is de begrenzing van een $(n + 1)$-dimensionale bol. Op grond van deze definities is een 0-dimensionale sfeer een puntenpaar, een 1-dimensionale sfeer een cirkelomtrek, een 2-dimensionale sfeer een boloppervlak.

De topologie stelt zich tot taak dié eigenschappen van omgevingsruimten op te sporen, welke invariant zijn voor topologische afbeeldingen; dus dié eigenschappen, welke gemeenschappelijk zijn aan een klasse van onderling homoiomorfe omgevingsruimten. [3])

Het is gewenst om zich bij dit onderzoek te beperken tot enigszins gespecialiseerde omgevingsruimten, want de algemeenheid van het begrip waarborgt niet het bezit van interessante eigenschappen.

Een niet te radicale beperking wordt verkregen door de eis van *trianguleerbaarheid* te stellen, d.w.z. de omgevingsruimte moet evenals een polyeder verdeelbaar zijn in simplices. Met een *n-dimensionaal simplex* bedoelt men het n-dimensionale analogon van een gewone vlakke driehoek. Men kan zulk een simplex definiëren als de kleinste convexe verzameling van een R_n, waartoe $n + 1$ gegeven punten behoren, mits deze punten niet reeds in een R_k met $k < n$ liggen. De $n + 1$ gegeven punten zijn de *hoekpunten* van het simplex. Ieder tweetal van deze hoekpunten bepaalt een 1-dimensionaal simplex, ieder drietal een 2-dimensionaal simplex, kortom: ieder $(\nu + 1)$-tal, $(\nu < n)$ bepaalt een ν-dimensionaal simplex. Deze simplices heten de *randsimplices* van het n-dimensionale simplex. Een 0-dimensionaal simplex is een punt; in dit geval zijn er geen randsimplices.

Een *n-dimensionaal topologisch simplex,* in het vervolg ook kortweg simplex genoemd, is een omgevingsruimte tezamen met een topologische afbeelding f daarvan op een n-dimensionaal simplex, zoals reeds gedefinieerd. De door f in de omgevingsruimte aan de hoekpunten van het zo juist genoemde simplex toegevoegde punten heten de *hoekpunten* van het topologische simplex. Het is duidelijk, dat een omgevingsruimte op meerdere wijzen als een topologisch simplex opgevat kan worden; vandaar dat de afbeelding f noodzakelijk in het begrip opgenomen moet worden. Als voorbeeld kunnen we nemen een cirkelschijf met drie punten op de omtrek, (fig. 6).

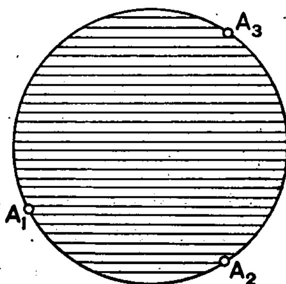


Fig. 6.

Een *trianguleerbare omgevingsruimte,* gewoonlijk *complex* genoemd, is een

[3]) Een goed leerboek over topologie is:
H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie,* Leipzig—Berlin 1934.

omgevingsruimte $\mathfrak{K}$, die door eindig vele of aftelbaar vele (topologische) simplices, waarvan de dimensies een geheel getal n ($\geqq 0$) niet overtreffen, overdekt kan worden.

Voor deze overdekking, gewoonlijk *triangulatie* genoemd, moeten de volgende regels gelden:

1°. Met ieder simplex behoren ook de randsimplices daarvan tot de overdekking.

2°. Ieder punt van $\mathfrak{K}$ behoort tot minstens één en tot hoogstens eindig vele simplices van de overdekking.

3°. De doorsnede van twee simplices van de overdekking is of wel leeg, of wel een eveneens tot de overdekking behorend simplex.

4°. Wordt een punt A van $\mathfrak{K}$ overdekt door de simplices $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_k$, en zijn $\mathfrak{U}_{\mathfrak{S}_1}, \ldots, \mathfrak{U}_{\mathfrak{S}_k}$ omgevingen van A in deze simplices, dan is de vereniging van deze omgevingen een omgeving van A in $\mathfrak{K}$, (fig. 7).

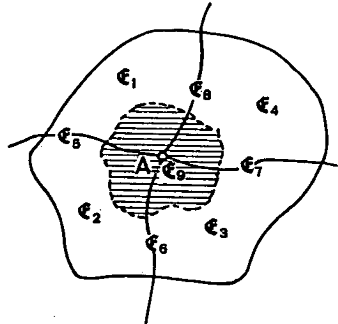


Fig. 7.

Een voorbeeld van een complex is de begrenzing van een simplex. De overdekking geschiedt door de randsimplices.

We zullen ons in het volgende slechts bezig houden met *eindige samenhangende complexen.* Een complex heet eindig, wanneer er een triangulatie bestaat gevormd door eindig vele simplices. Men kan aantonen, dat dan iedere triangulatie van het complex eindig is, *zodat de eindigheid van een complex een topologisch invariante eigenschap is.* Samenhangend wil zeggen, dat men ieder tweetal hoekpunten van het complex door een gebroken lijn, bestaande uit 1-dimensionale simplices, verbinden kan; het begrip is topologisch invariant.

Men kan verder aantonen, dat de maximale dimensie van de bij een triangulatie optredende simplices voor iedere triangulatie dezelfde is. *Deze dimensie is dus ook een topologische invariant* en het heeft zin om van de *dimensie* van een complex te spreken, als men daarvoor neemt de hoogste dimensie van de bij een triangulatie optredende simplices.

Een invariant, die ons in het bizonder interesseert is de volgende. Zij α_ν het aantal ν-dimensionale simplices van een triangulatie van het n-dimensionale complex $\mathfrak{K}$, ($\nu = 0, \ldots, n$). Het getal N gedefinieerd door:

$$(12) \qquad -N = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \alpha_{\nu}$$

is gebleken voor iedere triangulatie hetzelfde getal te zijn; het is dus topologisch invariant aan het complex gebonden. Men noemt N *de Eulerse karakteristiek van het complex.*

Een boloppervlak is homoiomorf met de begrenzing van een 3-dimensionaal simplex. De karakteristiek daarvan is

$$(13) \qquad N = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -4 + 6 - 4 = -2.$$

Voor ieder complex, homoiomorf met een boloppervlak, is de karakteristiek gelijk aan —2 en voor iedere triangulatie daarvan geldt de formule van E u l e r. Hiermede hebben we dus een behoorlijke precisering verkregen van de boven uitgesproken vage bewering, dat de geldigheid van de formule van E u l e r bestaan blijft, wanneer men een polyeder geleidelijk vervormt.

Voor meer dan drie dimensies geldt natuurlijk de bewering, dat de formule (5) van S c h ä f l i waar is voor iedere triangulatie van een complex, dat homoiomorf is met een n-dimensionale sfeer.

Tot de belangrijkste 2-dimensionale complexen behoren de *gesloten oppervlakken.* Een gesloten oppervlak is een *homogeen* 2-dimensionaal complex, d.w.z. ieder punt van het complex heeft een omgeving, die homoiomorf is met het binnengebied van een cirkelschijf. Wanneer men een gesloten oppervlak trianguleert zal de eis van homogeniteit tot gevolg hebben dat ieder 1-dimensionaal simplex tot juist twee 2-dimensionale simplices behoort.

We zagen reeds, dat de karakteristiek van een oppervlak (we laten in het vervolg de toevoeging gesloten gemakshalve weg), dat homoiomorf is met een boloppervlak, gelijk is aan —2. Het is zeer merkwaardig, dat van deze stelling de omkering geldt, m.a.w. *een oppervlak met karakteristiek—2 is homoiomorf met een boloppervlak.*

In dit verband krijgt nu het tweede voorbeeld genoemd bij de indeling van L h u i l i e r bizondere betekenis. Voor de karakteristiek daarvan vonden we reeds het getal 0. Verder is het intuïtief duidelijk en trouwens bewijsbaar, dat het oppervlak van de lijst homoiomorf is met een torusoppervlak, (fig. 8), een algebraisch oppervlak van de vierde graad, dat verkregen wordt door de wenteling van een cirkelomtrek om een in het vlak daarvan gelegen rechte, welke geen punten met de cirkelomtrek gemeen heeft.

Daar de karakteristieken niet overeenstemmen *zijn torusoppervlak*

en bolоppervlak niet homoiomorf. Men zou na het voorgaande kunnen vermoeden, dat ieder oppervlak met karakteristiek 0 homoiomorf is met een torusoppervlak.

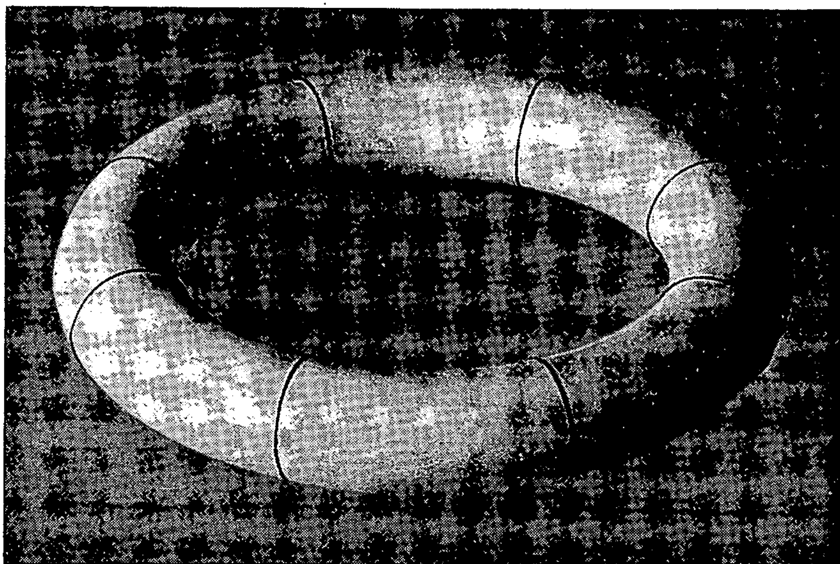


Fig. 8.

morf is met een torusoppervlak. Het zal blijken, dat dit vermoeden onjuist is.

Er bestaat namelijk bij oppervlakken nog een tweede invariant, de *oriënteerbaarheid,* welke door Möbius ontdekt is.

Aan de driehoeken van een 2-dimensionaal complex kan men ieder afzonderlijk een omloopzin toekennen door een cyklische volgorde van de hoekpunten aan te wijzen. Men zegt, dat men aan ieder van de driehoeken een *oriëntatie* heeft gegeven. Daarmede wordt in elk van de zijden van een driehoek een doorloopzin geïnduceerd, die we de *geïnduceerde oriëntatie* van zo'n zijde noemen en die blijkbaar gegeven is door de volgorde van de eindpunten. We beperken ons nu tot het geval, waarbij een zijde tot hoogstens twee driehoeken van de triangulatie van het complex behoort. Wanneer het mogelijk is de driehoeken zodanig te oriënteren, dat in iedere gemeenschappelijke zijde tegengestelde oriëntaties geïnduceerd worden, dan zegt men dat de driehoeken van het complex *cohaerent georiënteerd* zijn en dat het complex *cohaerent oriënteerbaar,* kortweg oriënteerbaar is. *Deze oriënteerbaarheid geldt dan namelijk voor elke triangulatie en is dus weer een topologische invariant.*

Niet ieder 2-dimensionaal complex met de eigenschap, dat een 1-dimensionaal simplex van een triangulatie tot hoogstens twee 2-dimensionale simplices behoort, is oriënteerbaar. Het bekendste voorbeeld is de band van M ö b i u s, welke als volgt gedefinieerd kan worden. Twee overstaande zijden van een rechthoek worden topologisch op elkaar afgebeeld, waarbij echter een omkering in de

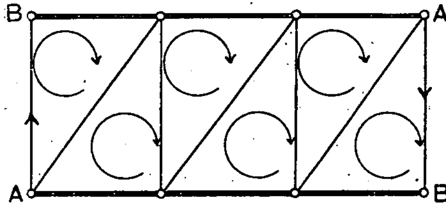


Fig. 9.

volgorde moet optreden, d.w.z. de eindpunten van de diagonalen moeten aan elkaar-toegevoegd worden. Een dergelijke afbeelding is bijvoorbeeld de centrale projectie uit het middelpunt van de rechthoek. De aan elkaar toegevoegde punten worden *geïdentificeerd*; daarmede wordt uit de rechthoek een omgevingsruimte afgeleid die de *band van* M ö b i u s *heet*. In figuur 9 is dit procédé

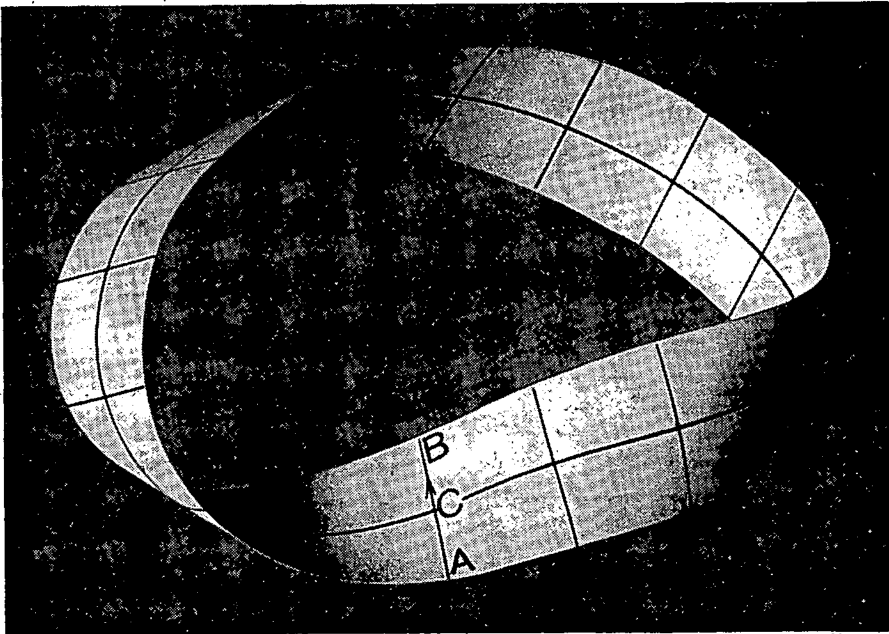


Fig. 10.

schematisch aangegeven door middel van twee pijlpunten in de te identificeren zijden. Tevens is in deze figuur een triangulatie aangegeven, waarbij men zich door proberen er gemakkelijk van overtuigt dat een cohaerente orientatie van de driehoeken niet mogelijk is.

Een materieel model van de band van Möbius verkrijgt men door een papierband over 180° te torderen en dan tot een gesloten band samen te plakken, (fig. 10). Dit plakproces is een aanschouwelijke illustratie van het wiskundige identificeren.

We willen nog even stilstaan bij een tweetal eigenschappen van de band van Möbius, die op het eerste gezicht enigszins wonderlijk aandoen. Daarvoor is het gewenst het rechthoek-model door een ander te vervangen.

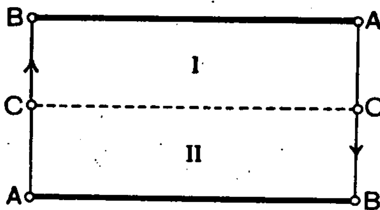


Fig. 11.

We gaan uit van het rechthoekmodel en snijden de rechthoek, waarvan twee overstaande zijden op de reeds bekende manier geïdentificeerd moeten worden, langs een lijn evenwijdig aan de andere zijden in tweeën, (fig. 11). De aldus verkregen rechthoeken noemen we I en II. In figuur 12 zijn deze rechthoeken afzonderlijk getekend, maar we moeten er om denken, dat de met *CC* aangeduide zijden geïdentificeerd moeten worden om de band van Möbius terug te krijgen. We denken ons nu het stuk II 180° omgelegd en boven het stuk I geplaatst, (fig. 13). Ieder stuk afzonderlijk kan topologisch op

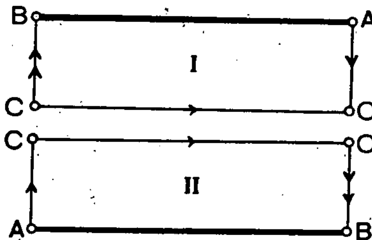


Fig. 12.

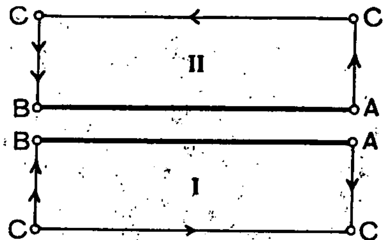


Fig. 13.

een halve cirkelring afgebeeld worden, (fig. 14). Van deze cirkelringen moeten de buitenomtrekken geïdentificeerd worden evenals de rechte stukken van de begrenzing.

Door geschikte keuze van de topologische afbeeldingen kan men er voor zorgen, dat de cirkelringen congruent zijn, en dat de aequivalente punten [4]) op de rechte begrenzingsstukken door een congruente afbeelding aan elkaar toegevoegd worden. Men verkrijgt na identificatie een cirkelring, waarbij de punten van de buitenomtrek

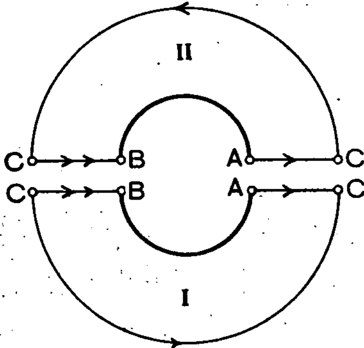


Fig. 14.

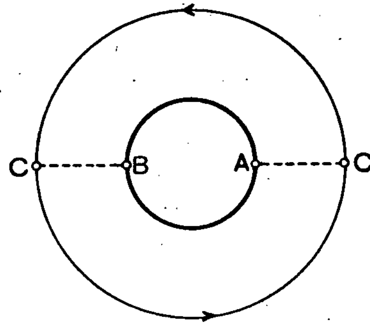


Fig. 15.

paarsgewijs aequivalent zijn, (fig. 15). Het blijkt mogelijk te zijn er voor te zorgen, dat de aequivalente punten diametraalpunten zijn.

We kunnen dus zeggen: *De band van* Möbius *is homoiomorf met een cirkelring, waarbij de diametraalpunten op de buitenomtrek geïdentificeerd zijn.*

De band van Möbius heeft een *rand,* die in het tweede model voorgesteld wordt door de binnenomtrek. De rand heeft de bizonderheid, dat bij iedere triangulatie een tot de rand behorend simplex tot slechts één driehoek van de triangulatie behoort. In de punten van de rand is aan de voorwaarde van homogeniteit niet voldaan; de band van Möbius is geen gesloten oppervlak.

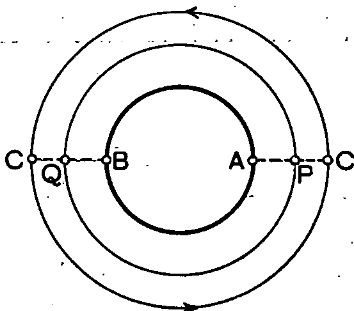


Fig. 16.

Het cirkel-model stelt in staat de aangekondigde stellingen zonder moeite af te lezen. In de eerste plaats merken we op, dat een cirkelomtrek concentrisch met de randcirkels van de cirkelring en met een straal, die tusschen de stralen van de randcirkels is gelegen, (fig. 16), de figuur verdeelt

[4]) Dat zijn punten die geïdentificeerd worden.

in een gewone cirkelring en in een cirkelring, waarbij de diametraalpunten van de buitenomtrek geïdentificeerd worden. *Er bestaat dus op de band van* M ö b i u s *een gesloten kromme* (topologisch beeld van een cirkelomtrek) *die de band verdeelt in een complex homoiomorf met een gewone cirkelring en een nieuwe band van* M ö b i u s. Men kan deze eigenschap aan het papiermodel controleren, wanneer men dit doorknipt langs een lijn, die steeds op ⅓ van de breedte van de band van de rand verwijderd blijft, (fig. 17). Er ontstaat inderdaad een nieuw papiermodel van een band van

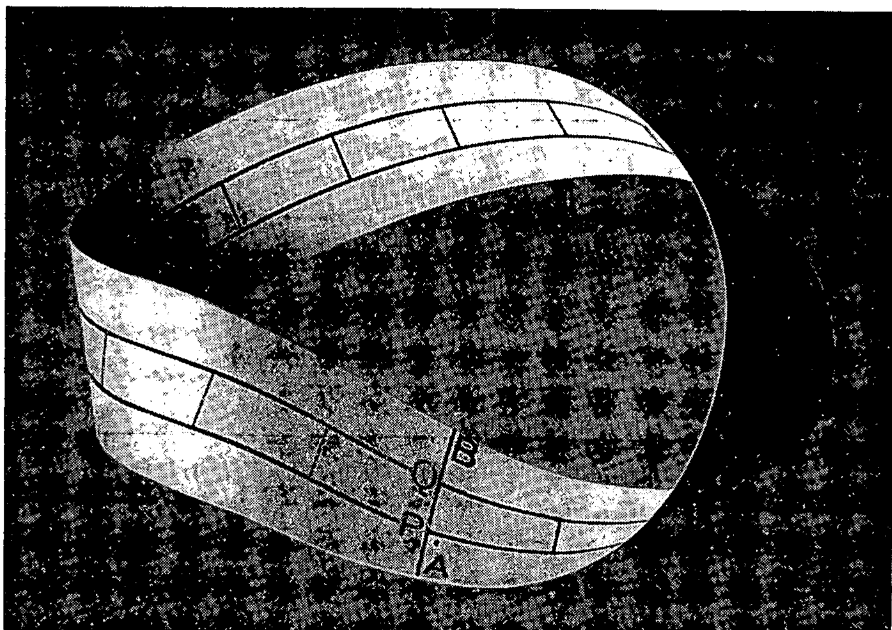


Fig. 17.

M ö b i u s en een band die uit een langwerpige rechthoekige strook verkregen wordt door deze over 720° te torderen en daarna de korte zijden samen te plakken. Een dergelijke band is inderdaad homoiomorf met een cirkelring, want het blijkt mogelijk te zijn de band op dezelfde wijze als een cirkelring te trianguleren.

Een tweede eigenschap vinden we als we de identificatie van de diametraalpunten op de buitenomtrek opheffen. Er ontstaat dan een gewone cirkelring. *Er bestaat dus op de band van* M ö b i u s *een gesloten kromme, waarlangs de band opengesneden kan worden tot*

een complex homoiomorf met een gewone cirkelring. Aan een papiermodel kan men deze eigenschap demonstreren door het langs een lijn open te knippen, die op halve breedte van de band van de rand verwijderd is, (fig. 10).

We zeiden reeds, dat de band van M ö b i u s geen voorbeeld is van een gesloten oppervlak. Het is echter niet moeilijk in te zien, op welke wijze er een gesloten oppervlak uit afgeleid kan worden. We behoeven slechts de cirkelschijf, die door de binnenste cirkel begrensd wordt, aan de band toe te voegen. Nauwkeuriger kunnen we dit proces aldus beschrijven: de rand van een cirkelschijf wordt topologisch op de rand van de band afgebeeld en de door deze afbeelding aan elkaar toegevoegde punten geïdentificeerd. Er ontstaat dan een gesloten oppervlak dat homoiomorf is met een cirkelschijf, waarbij de diametraalpunten op de rand geïdentificeerd zijn.

We zullen dit oppervlak nader onderzoeken. Zonder moeite wordt ingezien, dat het homoiomorf is met het ronde oppervlak van een halve bol, wanneer daarvan de diametraalpunten op de rand geïdentificeerd worden. Men verkrijgt namelijk een topologische afbeelding op een cirkelschijf door orthogonale projectie van de punten van het ronde oppervlak op het vlak, dat de randcirkel bevat.

We kunnen echter evengoed als model nemen een volledig boloppervlak, mits daarvan de diametraalpunten geïdentificeerd zijn.

De punten van een vlak, dat niet door het middelpunt van de bol gaat, zijn omkeerbaar éénduidig toe te voegen aan de rechten, die deze punten met het middelpunt van het boloppervlak verbinden. Voegen we de rechten door het middelpunt toe aan de door hen bepaalde richtingen van het vlak, dan kunnen we zeggen, dat de punten van het uit het vlak door adjunctie van ∞^1 richtingen verkregen projectieve vlak omkeerbaar éénduidig corresponderen met de diametraalpunten van het boloppervlak. Als we het omgevingsbegrip op de bol door centrale projectie op het projectieve vlak overdragen, kunnen we het gevondene aldus weergeven:

Het gesloten oppervlak, dat door sluiting van een band van M ö b i u s *met een cirkelschijf ontstaat, is homoiomorf met het projectieve vlak.*

En ook:

Het projectieve vlak is homoiomorf met een cirkelschijf, waarbij de diametraalpunten op de rand geïdentificeerd zijn.

We kunnen ons afvragen, in hoeverre het mogelijk is het projec-

tieve vlak in een driedimensionale Euklidische ruimte te realiseren. Deze mogelijkheid is inderdaad aanwezig, wanneer we ons op een ruim standpunt plaatsen en de wederzijdse doordringing van zijvlakken niet uitsluiten.

In navolging van M ö b i u s definieren we een M-polyeder als een systeem van eindig vele veelhoeken zodanig, dat iedere zijde gemeenschappelijk is aan hoogstens twee veelhoeken van het systeem. We zullen hierbij onder veelhoeken verstaan convexe delen van platte vlakken begrensd door een systeem van eindig vele lijnsegmenten.

In het projectieve vlak denken we ons een volledige vierzijde met hoekpunten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, waarbij de punten B_1, B_2, B_3 collineair gekozen worden, (fig. 18). Het projectieve vlak wordt

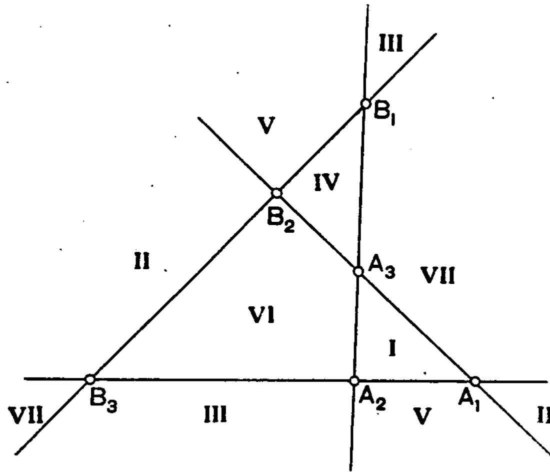


Fig. 18.

dan verdeeld in de vier driehoeken $A_1\ A_2\ A_3$, $A_1\ B_2\ B_3$, $B_1\ A_2\ B_3$, $B_1\ B_2\ A_3$, en de drie vierhoeken $A_1\ A_2\ B_1\ B_2$, $A_2\ A_3\ B_2\ B_3$, $A_3\ A_1\ B_3\ B_1$. [5])

Wanneer we ook nog de diagonalen trekken, hebben we tevens een triangulatie van het projectieve vlak. De karakteristiek is:

$$(14) \qquad N = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -9 + 24 - 16 = -1.$$

[5]) Onder deze driehoeken en vierhoeken komen er voor die „door het oneindige heen samenhangen", zoals bijvoorbeeld driehoek $A_1B_2B_3$. Een dergelijke driehoek is evenwel op te vatten als de centrale projectie van een gewone driehoek, die in dit bizondere geval het verdwijnvlak — het vlak door het projectiecentrum evenwijdig aan het tafereel — snijdt. De centrale projectie is een topologische afbeelding, mits de driehoek niet in een vlak door het centrum ligt.

Een topologisch gelijkwaardig model bestaat uit vier gelijkzijdige driehoeken en drie vierkanten, die we in het platte vlak aaneengelegd denken, (fig. 19) en waarbij bepaalde zijden geïdentificeerd

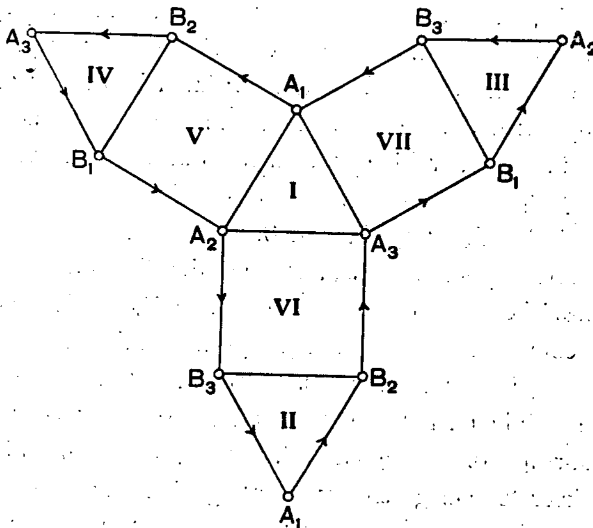


Fig. 19.

moeten worden. We kunnen deze figuur opvatten als de uitslag van een in de driedimensionale Euklidische ruimte gelegen *M*-polyeder, dat we kunnen verkrijgen door uit te gaan van een regelmatig octaeder, (fig. 20), A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3, waarbij A_1 B_1, A_2 B_2 en A_3 B_3 de hoofddiagonalen zijn. We denken ons daarin aangebracht

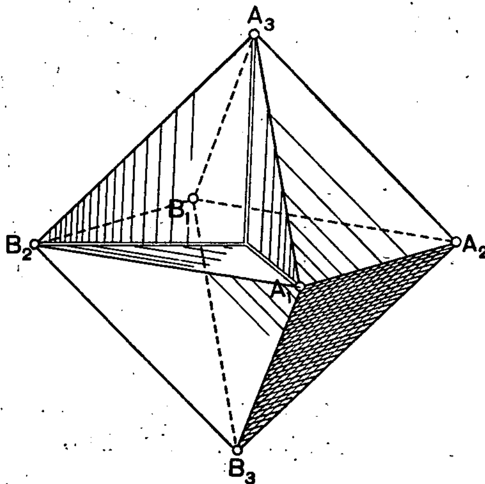


Fig. 20.

de diagonaalvlakken en nemen de binnengebieden van de driehoeken $A_1 B_2 A_3$, $B_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 B_3$, $B_1 B_2 B_3$ weg. Het aldus verkregen systeem van veelhoeken vertoont inderdaad dezelfde incidenties als de veelhoeken, waarin we het projectieve vlak verdeeld hebben. Het geconstrueerde veelvlak wordt *niet-oriënteerbaar heptaeder* genoemd; we zullen het kortweg met de naam heptaeder aanduiden.

Een polyedermodel voor de band van Möbius verkrijgen we uit het heptaeder door bijvoorbeeld het binnengebied van de driehoek $A_1 A_2 A_3$ weg te laten. De karakteristiek van de band van Möbius is blijkbaar gelijk aan 0.

Een gesloten oppervlak met karakteristiek 0 vinden we, wanneer we de randcirkels van twee banden van Möbius topologisch op elkaar afbeelden en de toegevoegde punten indentificeren. Immers bij de berekening van de karakteristiek moeten we de aantallen hoekpunten, ribben en driehoeken van de Möbius-band verdubbelen. Daarbij worden de aantallen hoekpunten en ribben op de rand een keer te veel geteld, maar aangezien deze aantallen gelijk zijn, hindert dit niet voor de berekening van de karakteristiek.

Een M-polyedermodel kan men afleiden uit twee heptaeders, door

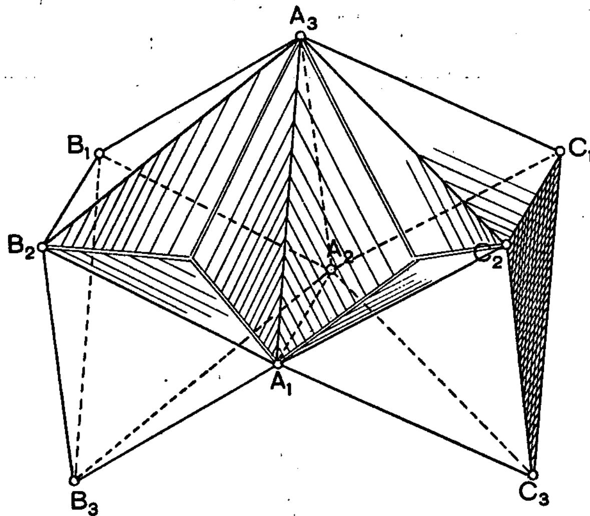


Fig. 21.

daarvan twee driehoeken te laten samenvallen en daarna daarvan het binnengebied te verwijderen, (fig. 21). Het bestaat uit $2 \times (7 - 1) = 12$ vlakken, zodat we het een niet-oriënteerbaar dodecaeder kunnen noemen.

Het geconstrueerde oppervlak heeft de karakteristiek 0 en is niet oriënteerbaar. Daar bewezen kan worden, dat de oriënteerbaarheid een topologische invariant is, *kan dit oppervlak niet homoiomorf zijn met het torusoppervlak.*

Men heeft gevonden, *dat de Eulerse karakteristiek en het oriënteerbaarheidskarakter een volledig systeem van topologische invarianten voor de gesloten oppervlakken vormen,* m.a.w. twee gesloten oppervlakken zijn homoiomorf, wanneer ze overeenstemmen in de Eulerse karakteristiek en het oriënteerbaarheidskarakter. In sommige gevallen volgt het oriënteerbaarheidskarakter reeds uit de karakteristiek. Alle oppervlakken met oneven karakteristiek zijn niet oriënteerbaar; de oppervlakken met karakteristiek —2 zijn oriënteerbaar.

We willen nu weer onze aandacht richten op het heptaeder. De in fig. 19 afgebeelde uitslag kan als een model van het projectieve vlak opgevat worden. Met ieder punt van de uitslag correspondeert één punt van het heptaeder en omgekeerd correspondeert met ieder punt van het heptaeder, dat tot geen der dubbelrechten behoort, één punt van de uitslag en dus van het projectieve vlak. Voor de punten van de dubbelrechten treden echter uitzonderingen op. Met een punt op een dubbelrechte, maar verschillend van het drievoudige punt, corresponderen twee punten in de uitslag, met uitzondering van de hoekpunten; aan ieder hoekpunt is weer één punt toegevoegd. Met het drievoudige punt corresponderen drie punten in de uitslag.

De hier optredende bizonderheden herinneren sterk aan soortgelijke, die men ziet optreden bij zekere algebraische afbeeldingen de *birationale afbeeldingen.* Het is inderdaad mogelijk het projectieve vlak birationaal af te beelden op een algebraisch oppervlak, dat in uiterlijk een verrassende overeenkomst met het heptaeder vertoont.

Om deze afbeelding te verkrijgen geven we in het projectieve vlak een coördinatendriehoek en noemen de coördinaten van een willekeurig punt ten opzichte van die driehoek (t_0, t_1, t_2). De getallen t_0, t_1 en t_2 zijn reëel en niet alle gelijk aan nul, terwijl ze met een zelfde van nul verschillende getal vermenigvuldigd mogen worden.

We beschouwen verder een lineair systeem van ∞^3 kegelsneden (kluwen), voorgesteld door:

(15) $u_0 (t_0^2 + t_1^2 + t_2^2) + 2u_1t_0t_1 + 2u_2t_0t_2 + 2u_3t_1t_2 = 0,$
waarin u_0, u_1 u_2 en u_3 onafhankelijke reële parameters zijn, die niet alle gelijk zijn aan nul.

In de projectieve ruimte nemen we een coördinatenviervlak en noemen de coördinaten van een willekeurig punt ten opzichte van dit viervlak (x_0, x_1, x_2, x_3).

We voegen nu de exemplaren van het kluwen projectief toe aan de vlakken van de projectieve ruimte. Een dergelijke projectiviteit is aanwezig, wanneer de door (15) voorgestelde kegelsnede toegevoegd wordt aan het vlak:

(16) $u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$

Dan corresponderen de kegelsneden van het kluwen door het punt (t_0, t_1, t_2) omkeerbaar éénduidig met de vlakken door het punt (x_0, x_1, x_2, x_3), waarbij

(17) $$\begin{cases} x_0 = t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 \\ x_1 = 2t_0 t_1 \\ x_2 = 2t_0 t_2 \\ x_3 = 2t_1 t_2 \end{cases}$$

Alle op deze wijze te verkrijgen punten van de projectieve ruimte worden gedragen door een algebraisch oppervlak, waarvan de vergelijking gevonden wordt door eliminatie van t_0, t_1 en t_2 uit (17). Een eenvoudige berekening leert, dat de vergelijking van het oppervlak luidt:

(18) $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 - 2x_0x_1x_2x_3 = 0.$

Hierdoor wordt het beroemde *oppervlak van* Steiner voorgesteld, het z.g. romeinse oppervlak.[6]) Het is blijkbaar van de vierde graad; de oorsprong, het punt (1, 0, 0, 0), is een drievoudig punt en de drie door dit punt gaande ribben van het coördinatenviervlak zijn dubbelrechten.

Men kan een metrisch bizonder model van het oppervlak construeren door $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$ voor $x_0 \neq 0$ te interpreteren als inhomogene coördinaten ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel in een gewone Euklidische ruimte. In fig. 22 is dit model weergegeven.[7])

---

[6]) Zo genoemd omdat Steiner het ontdekte tijdens een verblijf in Rome in het jaar 1844. Onafhankelijk van Steiner is het door Kummer opnieuw ontdekt.

[7]) Photografie van een gipsmodel uit de verzameling van mathematische modellen in het bezit van de Rijks-Universiteit te Groningen.

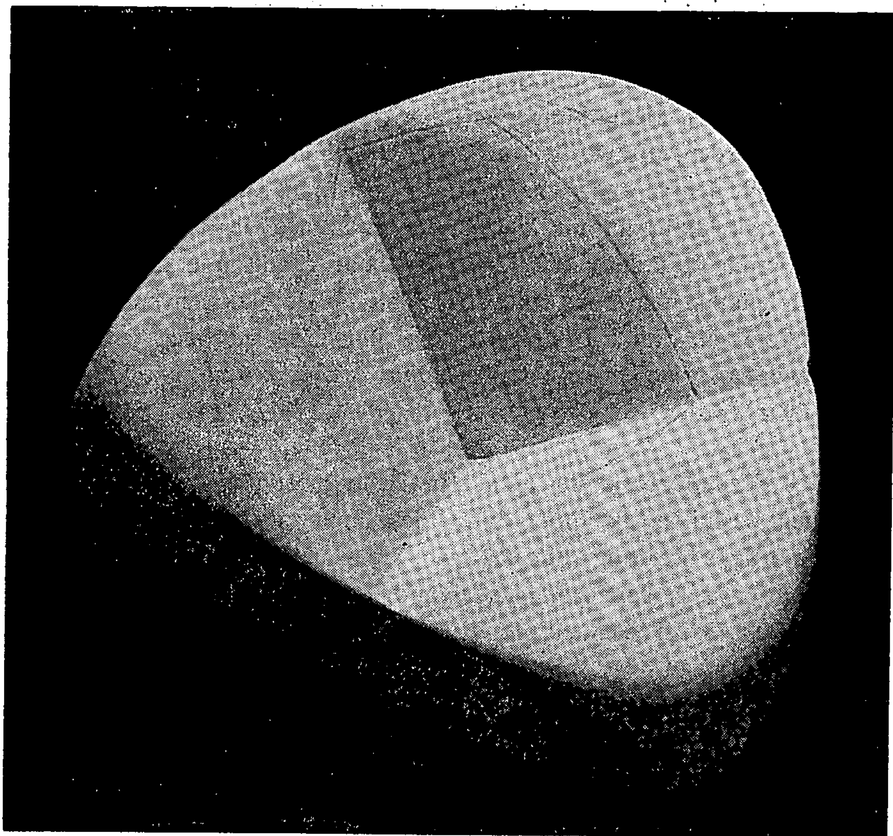


Fig. 22.

Een algemeen punt van de projectieve ruimte is centrum van een vlakkenschoof, waarmede in het projectieve vlak een kegelsnedennet zonder basispunten correspondeert. Een punt op het oppervlak niet gelegen op een dubbelrechte is centrum van een schoof, die met een net met één basispunt correspondeert; dit basispunt is in de afbeelding aan het bewuste punt toegevoegd. Behoort het punt tot een dubbelrechte, maar is het niet het drievoudige punt, dan is het centrum van een schoof, waarmee een net met twee basispunten correspondeert. De basispunten kunnen samenvallen. Op iedere dubbelrechte liggen twee punten, waarbij dit geschiedt; het zijn de z.g. *klempunten* van het oppervlak. [8]) Het drievoudige punt draagt

[8]) Ook genoemd *uniplanaire punten,* omdat de beide raakvlakken in een dergelijk punt aan het oppervlak samenvallen. De overige punten van de dubbelrechten zijn *biplanaire punten,* met uitzondering van het drievoudige punt, dat een *triplanair punt* is.

een schoof, waarmee een net met drie basispunten correspondeert.

De birationale verwantschap tussen het oppervlak en het projectieve vlak is dus niet een topologische afbeelding. Wel kan met behulp van een kleine kunstgreep een topologische afbeelding verkregen worden, als we het oppervlak beschouwen als drager van ∞^2 vlakelementen, ieder bestaande uit een punt van het oppervlak en het raakvlak in dit punt aan het oppervlak. De birationale afbeelding definieert inderdaad een omkeerbaar éénduidige afbeelding van de punten van het projectieve vlak op de vlakelementen van het oppervlak van Steiner en na invoering van een passend omgevingsbegrip kan deze afbeelding als een topologische beschouwd worden.

Met deze excursie in de algebraische meetkunde meen ik te moeten besluiten. Ik hoop, dat U iets hebt ondervonden van de eigenaardige bekoring, die van de probleemstellingen in de topologie uitgaat en dat ik er in geslaagd ben bij U het besef te verlevendigen, dat de elementaire wiskunde niet een op zich zelf staand geheel is, maar door middel van tal van banden met de hogere wiskunde is verbonden.

DE ROTATIE VAN HET MELKWEGSTELSEL

DOOR

P. J. VAN RHIJN.

Het Melkwegstelsel wordt gevormd door eén groot aantal sterren, een kleiner aantal bolvormige sterrenhoopen en diffuse nevels en een zekere hoeveelheid donkere materie, die tamelijk onregelmatig tusschen de sterren verdeeld is. Het stelsel, waartoe ook de zon behoort, wordt begrensd door een omwentelings-ellipsoide met een verhouding der assen 6 : 1. De lengte van de groote as is 30000 parsec, die van de kleine as 5000 parsec [1]).

De equator van dit sterk afgeplatte stelsel valt samen met den Melkweg. De dichtheid d.i. het aantal sterren per volumeneenheid is groot in de nabijheid van het middelpunt van het stelsel en neemt naar buiten toe af. Op het oppervlak van de boven bepaalde ellipsoide is de dichtheid nul. De zon is in het equatorvlak van de ellipsoide gelegen op een afstand van 10000 parsec van het middelpunt. De richting van de zon naar het middelpunt heeft een galaktische lengte 325° en, daar zoowel de zon als het middelpunt in den Melkweg liggen, een galaktische breedte 0°.

Het hier aangegeven grensoppervlak van het stelsel en de plaats, die de zon in het stelsel inneemt, zijn afgeleid uit de verdeeling der hemellichamen, in het bijzonder uit de verdeeling der bolvormige sterrenhoopen in de ruimte.

Men houde het voorgaande niet voor een eenigszins nauwkeurige beschrijving van den werkelijken vorm van het Melkwegstelsel.

De dichtheden der sterren in de nabijheid van de zon zijn tamelijk goed bekend; omtrent de dichtheden in de nabijheid van het middelpunt en in gebieden, die aan gene zijde van het middelpunt gelegen zijn, weten wij uiterst weinig. De richting naar het middelpunt en de afstand van de zon tot het middelpunt zijn met tamelijk groote nauwkeurigheid bekend.

---

[1]) 1 parsec $= 3.08 \times 10^{13}$ km.

Voordat ik overga tot de uiteenzetting van de rotatietheorie van het Melkwegstelsel, maak ik eenige inleidende opmerkingen omtrent de bewegingen der sterren en der zon.

De coördinaten van een ster in een rechthoekig coördinatenstelsel noem ik x, y, z. Het z.g. geometrische zwaartepunt P der sterren in de nabijheid van de zon is bepaald door de vergelijkingen

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma z}{n}.$$

n = het aantal sterren.

Σ beteekent de som van het symbool onder het Σ teeken voor alle sterren in de nabijheid van de zon.

De snelheidscomponenten van dit geometrische zwaartepunt P zijn gegeven door:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\Sigma \frac{dx}{dt}}{n}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\Sigma \frac{dy}{dt}}{n}, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\Sigma \frac{dz}{dt}}{n}.$$

Indien men den oorsprong van het coördinatenstelsel verplaatst naar het punt P, dan zal dus de som der snelheidscomponenten der sterren in de nabijheid van de zon volgens elk der drie assen nul zijn.

De zon heeft ten opzichte van het punt P een snelheid van 20 km per sec. in de richting: galaktische lengte 23° en galaktische breedte + 22°.

De bewegingen der sterren ten opzichte van P vertoonen de volgende eigenschappen:

1. Met betrekking tot deze bewegingen kunnen de sterren verdeeld worden in twee groepen. De sterren van één groep hebben een gemeenschappelijke stroombeweging; de richtingen der stroombewegingen voor beide groepen zijn diametraal aan elkaar tegenovergesteld. Daarenboven heeft elke ster een peculiaire beweging, die van ster tot ster verschillend is. De peculiaire bewegingen zijn ordeloos verdeeld, d.i. het aantal sterren, dat zich in een bepaalde richting beweegt met een bepaalde grootte van de peculiaire beweging, is van die richting onafhankelijk. De stroombewegingen ten opzichte van P moeten noodzakelijk diametraal aan elkaar tegenovergesteld zijn, aangezien P zóó gekozen is, dat de som der stroomsnelheden voor alle sterren der beide groepen nul is. De

richting der sterrenstroomen blijkt samen te vallen met de lijn, die de zon met het middelpunt van het stelsel verbindt.

2. De sterren met een snelheid t.o.v. P grooter dan 70 km per sec. (de z.g. groote snelheidssterren) hebben een eigenschap, die door de theorie der sterstroomen niet wordt verklaard. Men denke zich een lijn door P, gelegen in het vlak van den Melkweg en loodrecht op de richting naar het middelpunt van het stelsel. Deze lijn snijdt den hemelbol in de punten:

galaktische lengte $l = 55°$, galaktische breedte $b = 0°$,
galaktische lengte $l = 235°$, galaktische breedte $b = 0°$.

De bewegingen der groote snelheidssterren zijn bijna zonder uitzondering gericht naar het halfrond van den hemelbol met $l = 235°$, $b = 0°$ als middelpunt; practisch is geen enkele beweging gericht naar het tegenoverliggende halfrond.

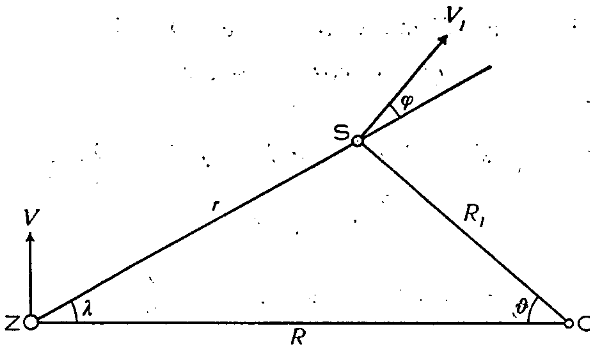


Fig. 1.

Ik ga nu over tot de uiteenzetting van de door Lindblad en Oort ontwikkelde rotatietheorie. Daarbij onderstellen wij eenvoudigheidshalve voorloopig, dat de bewegingen van de zon en de sterren, behandeld op blz. 40, te verwaarloozen zijn. In dezen vereenvoudigden vorm luidt de rotatietheorie: elke ster beschrijft een cirkel om een as door het middelpunt van het Melkwegstelsel en loodrecht op het equatorvlak van het stelsel; de snelheid van de rotatiebeweging hangt uitsluitend af van den afstand tot de as.

Ten einde deze stelling aan de hand der waarnemingen te toetsen onderzoeken wij den invloed van de rotatiebeweging op de waargenomen snelheden der sterren in de gezichtslijn en beperken ons daarbij voorloopig tot sterren gelegen in den Melkweg. Zij Z de zon, C het rotatiemiddelpunt en S de ster (fig. 1). Het vlak van teekening valt samen met het vlak van den Melkweg.

Zij verder:

V de rotatiesnelheid van de zon Z loodrecht op ZC;

V_1 de rotatiesnelheid van de sterren S loodrecht op SC;

R de afstand van de zon tot het rotatiemiddelpunt C;

R_1 de afstand van de ster tot het rotatiemiddelpunt C;

r de afstand van de ster tot de zon;

λ $= l - l_0$;

l = galaktische lengte van de ster, gezien van uit de zon;

l_0 = galaktische lengte van het rotatiemiddelpunt C gezien van uit de zon;

φ = de hoek tusschen de rotatiesnelheid V_1 en de gezichtslijn ZS;

ϑ = $\angle$ ZCS.

De rotatiesnelheden gelden ten opzichte van een inertiaalstelsel met den oorsprong in C.

Men heeft van eenige duizenden sterren de snelheid in de gezichtslijn ten opzichte van de zon waargenomen. Deze is

(1) $$\varrho = V_1 \cos\varphi - V \sin\lambda.$$

Verder is:

(2) $$\cos\varphi = \sin(\lambda + \vartheta) = \sin\lambda\cos\vartheta + \cos\lambda\sin\vartheta.$$

(3) $$\sin\vartheta = \frac{r}{R_1}\sin\lambda.$$

(4) $$R_1 = R\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\lambda + \frac{r^2}{R^2}}.$$

Men onderstelt dat R groot is ten opzichte van r, zoodat $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ mag worden verwaarloosd. Dan is:

(5) $$R_1 = R\left(1 - \frac{r}{R}\cos\lambda\right) \text{ of } R_1 = R - r\cos\lambda.$$

Men vindt dan verder uit (3 en (5) met verwaarloozing van de termen $\left(\frac{r}{R}\right)^2$:

(6) $$\sin\vartheta = \frac{r}{R - r\cos\lambda}\sin\lambda = \frac{r}{R}\sin\lambda.$$

$\sin\vartheta$ is dus van de orde van grootte van $\frac{r}{R}$ en dus

(7) $$\cos\vartheta = 1.$$

Substitueer (6) en (7) in (2):

(8) $$\cos\varphi = \sin\lambda + \frac{r}{R}\cos\lambda\sin\lambda.$$

Verder is V uitsluitend functie van R. Derhalve is

(9) $$V_1 = V + \Delta R \frac{dV}{dR}{}^{1)} = V - r \cos \lambda \frac{dV}{dR}$$

waarin $\Delta R = R_1 - R = - r \cos \lambda$ volgens (5).

Substitueer (8) en (9) in (1), dan is

$$\varrho = \left(V - r \cos \lambda \frac{dV}{dR}\right) \left(\sin \lambda + \frac{r}{R} \sin \lambda \cos \lambda\right) - V \sin \lambda$$

of met verwaarloozing van $\left(\frac{r}{R}\right)^2$:

(10) $$\varrho = rA \sin 2\lambda$$

waarin

(11) $$A = \frac{1}{2} \frac{V}{R} - \frac{1}{2} \frac{dV}{dR}.$$

De radieele snelheid van een ster in den Melkweg is dus afhankelijk van λ (d.i. de galaktische lengte van de ster verminderd met de galaktische lengte van het centrum) volgens de sinus van de dubbele hoek en de amplitudo van de golfbeweging is evenredig met den afstand r van de ster tot de zon. A is een constante.

Men bedenke, dat de formule (10) *niet* aangeeft de radieele rotatiesnelheid van een ster t.o.v. een inertiaalstelsel, maar de radieele rotatiesnelheid van een ster t.o.v. de zon, d.i. het verschil van de rotatiesnelheid van de ster en de zon, geprojecteerd op de gezichtslijn zon — ster. Indien alle sterren roteerden met dezelfde hoeksnelheid, dan zouden de afstanden van de zon en de sterren ten gevolge van de rotatie niet veranderen, zoodat het rotatieëffect in de radieele snelheden nul zou zijn.

---

[1]) Bij deze ontwikkeling verwaarloost men de term $\frac{\Delta R^2}{1.2} \frac{d^2 V}{dR^2}$ en hoogere ordetermen. $\frac{\Delta R^2}{2} \frac{d^2 V}{dR^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\cos^2 \lambda}{2} R^2 \frac{d^2 V}{dR^2}$.

Nu is $R^2 \frac{d^2 V}{dR^2}$ van de orde van grootte van V, indien de versnelling, die Z ondervindt gericht is naar C, en in grootte gelijk aan CR^n, waarin n een klein negatief of positief getal is. Dit is in het Melkwegstelsel inderdaad het geval. Derhalve is de term $\frac{\Delta R^2}{2} \frac{d^2 V}{dR^2}$, die $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ als een factor bevat, klein t.o.v. V en mag worden verwaarloosd.

Voor een ster buiten den Melkweg op afstand r tot de zon, galaktische lengte l en galaktische breedte b is

(12) $$\varrho = rA \sin 2\lambda \cos^2 b$$

Het bewijs van deze stelling laat ik achterwege.

Wij onderzoeken nu hoe de formule (12) wordt gewijzigd, indien men met de bewegingen van de zon en de sterren, beschreven op blz. 40, rekening houdt.

Daartoe verdeelt men de ruimte in volumenelementen, die zoo groot worden gedacht, dat elk element tenminste eenige tientallen sterren bevat, en aan den anderen kant zoo klein, dat de veranderingen van de rotatiesnelheid binnen elk element kunnen worden verwaarloosd. Denken wij ons verder de snelheid van het geometrisch zwaartepunt van elk element.

De rotatietheorie leert nu, dat niet de individueele sterren, maar de geometrische zwaartepunten der volumenelementen een zuivere rotatiebeweging uitvoeren. Elke ster heeft volgens het op blz. 40 gezegde een beweging t.o.v. het zwaartepunt van het volumenelement, waartoe de ster behoort. Deze peculiaire snelheid doet de banen der individueele sterren van de cirkelbeweging afwijken. De gemiddelde peculiaire snelheid der sterren van één element is nul. Dit volgt uit de definitie van het geometrisch zwaartepunt op blz. 40.

Zij nu S een ster, Z de zon, P'_s de projectie van het geometrisch zwaartepunt P_s van het element, waartoe S behoort, op de gezichtslijn ZS, P'_z de projectie van het geometrisch zwaartepunt P_z van het element, waartoe de zon behoort, op de gezichtslijn ZS.

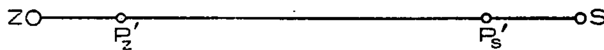


Fig. 2.

In de geteekende figuur is

$$ZS = SP^1_s + P^1_z P^1_s + ZP^1_z.$$

Differentieert men deze formule naar den tijd, dan is:

(13) Radieele snelheid van de ster t.o.v. de zon = radieele snelheid van de ster t.o.v. P_s + radieele snelheid van P_s t.o.v. P_z + radieele snelheid van P_z t.o.v. de zon.

Neemt men het gemiddelde van linker- en rechterlid van de vergelijking (13) voor sterren gelegen binnen een bepaald volumenelement met het zwaartepunt in P, dan is:

(14) Gemiddelde radieele snelheid dezer sterren t.o.v. de zon

= radieele snelheid van P_s t.o.v. P_z + radieele snelheid van P_z t.o.v. de zon.

Immers de gemiddelde waarde van den eersten term van het tweede lid van (13) is nul.

De beweging, zoowel van P_s als van P_z t.o.v. het middelpunt, is een zuivere rotatiebeweging, zoodat de radieele snelheid van P_s t.o.v. P_z volgens formule (12) $= rA \sin 2 (l - l_0) \cos^2 b$.

De radieele snelheid van P_z t.o.v. de zon $= X \cos l \cos b + Y \sin l \cos b + Z \sin b$, indien X, Y, Z de componenten der snelheid van P_z t.o.v. de zon voorstellen in een rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan de X-as is gericht naar het punt $l = 0^0$, $b = 0^0$, de Y-as naar het punt $l = 90^0$, $b = 0^0$. Het bewijs is eenvoudig en wordt niet gegeven.

Tenslotte wordt dus (14):

(15) $$\overline{\varrho} = \overline{r}A \sin 2 (l - l_0) \cos^2 b + X \cos l \cos b + \\ + Y \sin l \cos b + Z \sin b$$

waarin $\overline{\varrho}$ = de gemiddelde radieele snelheid van de sterren in een volumenelement in de richting galaktische lengte l, galaktische breedte b, op een gemiddelde afstand $\overline{r}$ van de zon.

Het blijkt, dat de gemiddelde waargenomen radieele snelheden als functie van $\overline{r}$, l en b inderdaad aan de vergelijking (15) voldoen. In het bijzonder blijken deze een term te bevatten, afhankelijk van $\sin 2 (l - l_0)$. Uit een aantal conditievergelijkingen van den vorm (15) lost men de onbekenden $\overline{r}A$, l_0, X, Y en Z op. Hierbij is dan ondersteld, dat de gemiddelde afstand $\overline{r}$ voor de sterren in verschillende richtingen dezelfde is. De sterren worden zoo uitgekozen, dat dit inderdaad het geval is.

Ik behandel nu zeer in het kort den invloed van de galaktische rotatie op de eigenbeweging, d.i. de hoek, waaronder van de zon uit de beweging van de ster wordt gezien. De termen afkomstig van de rotatie in de uitdrukking van de eigenbeweging in galaktische lengte zijn:

(16) $$\mu_l = \frac{A}{4.74} \cos 2 (l - l_0) + \frac{A - \frac{V}{R}}{4.74}$$

μ_l = de eigenbeweging in de richting van toenemende galaktische lengte wordt uitgedrukt in boogsecunden per jaar, A en $\frac{V}{R}$ worden

uitgedrukt in $\frac{\text{km}}{\text{sec} \times \text{parsec}}$. Als onbekenden komen hierin voor A, $\frac{V}{R}$ en l_0. Men kan deze oplossen uit conditievergelijkingen van den vorm (16), aangevuld met termen afkomstig van de beweging van de zon ten opzichte van het zwaartepunt der sterren in de buurt van de zon.

Het resultaat van de oplossing van de conditievergelijkingen (15) en (16) is

$$A = 0.018 \text{ in } \frac{\text{km}}{\text{sec} \times \text{parsec}}$$

(17) $$\frac{R}{V} = 0.033 \quad \text{„}$$

$$l_0 = 325^\circ.$$

Men is er nu verder in geslaagd de rotatiesnelheid van de zon V althans bij benadering te vinden. Het is nl. op gronden, die ik hier niet vermeld, waarschijnlijk, dat het stelsel der bolvormige sterrenhoopen niet aan de rotatie deelneemt. De snelheid van de zon t.o.v. het stelsel der bolvormige sterrenhoopen kan dus uit de radieele snelheden der bolhoopen worden afgeleid. Men neemt een rechthoekig coördinatenstelsel met de zon als oorsprong, waarvan de assen gericht zijn naar de punten

galaktische lengte 0°	galaktische breedte 0°
galaktische lengte 90°	galaktische breedte 0°
	galaktische breedte 90°

De componenten van de zonsbeweging t.o.v. het stelsel der bolhoopen noemt men $-X$, $-Y$, $-Z$. Dan heeft de bolhoop t.o.v. de zon een beweging $+X$, $+Y$, $+Z$ en de radieele snelheid van de bolhoop t.o.v. de zon

(18) $\varrho = X \cos b \cos l + Y \cos b \sin l + Z \sin b +$ peculiaire radieele snelheid van de bolhoop.

Hierin stellen b en l de galaktische breedte en lengte van den bolhoop voor. Men lost nu X, Y, Z volgens de methode der kleinste kwadraten op uit conditievergelijkingen van den vorm (18), waarin de peculiaire radieele snelheid van den bolhoop d.i. de radieele snelheid t.o.v. het zwaartepunt der bolhoopen nul wordt gesteld. Bij deze bepaling wordt dus de onderstelling gemaakt dat de peculiaire radieele snelheden als waarnemingsfouten kunnen worden behandeld. Men vindt uit X, Y en Z gemakkelijk richting en

grootte der zonsnelheid t.o.v. het stelsel der bolhoopen. Het resultaat is, dat de zon zich beweegt naar het punt met een galaktische lengte 70° en een galaktische breedte 0° met een snelheid van 280 km/sec. De richting van de beweging is ongeveer loodrecht op de richting naar het middelpunt van het stelsel nl. lengte 325°, breedte 0°. Men neemt dus aan, dat de gevonden zonsnelheid 280 km per sec. de rotatiesnelheid van de zon voorstelt [1]).

Daar volgens (17) $\frac{V}{R} = 0.033 \frac{\text{km}}{\text{sec} \times \text{persec}}$ en $V = 280 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ zal dus R, de afstand van de zon tot het rotatiemiddelpunt in den Melkweg, gelijk zijn aan 8400 parsec. In ronde getallen neemt men aan $R = 10000$ parsec, hetgeen overeenstemt met den afstand van de zon tot het middelpunt van het stelsel, zooals deze werd afgeleid uit de verdeeling der bolhoopen in de ruimte (zie blz. 39). Daar ook de richting van het rotatiemiddelpunt in den Melkweg samenvalt met de richting van het middelpunt van het stelsel (zie blz. 39 en (46)), zal dus *het middelpunt van rotatie in den Melkweg samenvallen met het middelpunt van het Melkwegstelsel.*

Uit de gevonden waarde van $\frac{V}{R} = 0.033 \frac{\text{km}}{\text{sec} \times \text{parsec}}$ is de omloopstijd van de zon om het middelpunt van het stelsel gemakkelijk te vinden: $\frac{2\pi R}{V} = 2 \times 10^8$ jaren. Daar de ouderdom van de aarde en dus ook van de zon stellig hooger is dan 2×10^8 jaren, heeft de zon reeds meerdere omwentelingen om het middelpunt volbracht.

Tenslotte laat ik nog zien dat de eigenschappen der beweging, die op blz. 40 onder 1 en 2 werden beschreven, met de rotatie van het Melkwegstelsel samenhangen. Het bleek, dat geen der sterren met een snelheid t.o.v. P [2]) $> 70 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ zich beweegt in de richting van het halfrond van den hemelbol, waarvan het middelpunt ligt bij

---

[1]) Men vindt op deze wijze de beweging van de zon t.o.v. het zwaartepunt der bolhoopen, welke geen zuivere rotatiebeweging is. Immers niet de zon zelf, maar het zwaartepunt P der sterren in de nabijheid van de zon voert een zuivere rotatiebeweging uit. Daar echter de snelheid van de zon t.o.v. P klein is t.o.v. de rotatiesnelheid, mag men de grootheden $-X$, $-Y$ en $-Z$ als een rotatiebeweging opvatten.

[2]) P is het geometrisch zwaartepunt der sterren in de nabijheid van de zon (zie blz. 40).

$l = 55°$ $b = 0°$. Nu valt deze richting ongeveer samen met de richting van de rotatie van het punt P. Indien een ster een snelheid t.o.v. P had in deze richting grooter dan 70 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$, dan zou de snelheid van de ster in de bedoelde richting t.o.v. het middelpunt van het stelsel grooter zijn dan $280 + 70 = 350$ $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ (280 stelt natuurlijk de rotatiesnelheid voor).

Een snelheid t.o.v. P in de diametraal tegenovergestelde richting komt overeen met een snelheid t.o.v. het middelpunt van $280 - 70 = 210$ $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Daar de eerstgenoemde snelheden *niet* en de laatstgenoemden *wel* voorkomen, neemt men aan, dat de aantrekkingskracht van het Melkwegstelsel op sterren met een snelheid $\geqq 350$ $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ niet voldoende is om de ster aan het stelsel te binden. Deze sterren zullen dus, indien zij ooit hebben bestaan, aan het stelsel ontsnapt zijn. Een ster met een snelheid van 210 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ kan wèl door de aantrekking van het stelsel gebonden worden, zoodat groote snelheden in de richting diametraal tegenovergesteld aan de rotatie wèl kunnen voorkomen.

Het verschijnsel der sterstroomen kan als volgt in verband met de rotatie worden gezien. Het zwaartepunt P der sterren bij de zon zal volgens de rotatietheorie een zuivere rotatiebeweging uitvoeren. De sterren in de nabijheid van P zullen, ten gevolge van hun peculiaire snelheid, banen t.o.v. P beschrijven. Een mechanische beschouwing leert, dat deze banen ellipsen zijn, waarvan de assen samenvallen met de richting naar het middelpunt en de lijn loodrecht op deze richting. Verder zullen de sterren, die zich op een bepaald oogenblik in een bepaald volumenelement bevinden, b.v. in een volumenelement dicht bij de zon ten opzichte van het zwaartepunt van dat volumenelement snelheden hebben, die bij voorkeur gericht zijn in de richting naar het centrum of de diametraal tegenovergestelde richting, zooals de theorie der sterstroomen verlangt. Op deze wijze zou men kunnen verklaren, waarom de projecties der snelheden der sterren bij de zon op het vlak van den Melkweg bij voorkeur gericht zijn naar het middelpunt van het stelsel. Het blijkt echter verder dat de dispersie der snelheids-

componenten loodrecht op het vlak van den Melkweg, zooals deze uit de rotatietheorie volgt, niet met de waarneming overeenstemt, zoodat alle moeilijkheden op dit gebied nog niet zijn opgelost. Ik ga hierop niet verder in.

Uit het voorgaande zal het, hoop ik, duidelijk geworden zijn, dat de theorie van de rotatie ons inzicht in de bewegingen en de structuur van het Melkwegstelsel aanzienlijk heeft verruimd en dat zij van de belangrijkste verschijnselen met betrekking tot deze bewegingen rekenschap kon afleggen.

A REMARKABLE FAMILY

by

J. G. VAN DER CORPUT.

Chapter I.

In which the author loudly proclaims the praise of the family, reveals a family secret and refuses to acknowledge the rules set by ancient and time honoured usage.

Why should not I write a family novel for a change? Presumably I lack every ability necessary for this accomplishment, but I don't care; I am not the only one to disregard his qualm [1]. Every imbecile, and therefore a fortiori you, esteemed reader, will appreciate the timorousness with which I take up my fountain pen to write the history of this venerable, aged, but nevertheless flourishing family, which finds its historian in me. I have carefully studied the family archives, which depict the surprising adventures and striking characters of numerous of its representatives in many thrilling passages. All members show characteristic family traits, but between the individuals (if I may be allowed to use such a common word in relation to such an illustrious lineage) great diversity exists. The family rightfully boasts of numerous first rate, thoroughly respectable, reliable, prominent citizens, who never disappoint one, who are ready at all times to lend a helping hand, and have rendered mankind many invaluable services, but alas, I must admit with regret, others are disreputable, unmannered, unruly ne'er do wells. They cannot stand daylight these degenerate members of this aristocratic race, who kick over the traces and have never done an honest stroke of work.

A cloud of mystery hangs over the life of these degenerates and I have set myself the task of unravelling the secret of their domestic life. I have studied their birth certificates, their identification cards and passports with the utmost care, but there is always

[1]) Against my better judgment, at the urgent request of my anxious relatives and friends, I have struck out the bibliography pertaining hereto.

something amiss. There are even those who doubt their very existence. These degenerate individuals have a common ancestor, a bastard who bears the name of Zermelo Axiom. This ancestor has become a legendary figure, who according to some has never existed. Now, if one questions the existence of Zermelo Axiom, evidently one also doubts his descendants. The family papers that I consulted frequently referred to him, but I have never obtained absolute evidence that this mysterious personage actually trod the earth.

When discussing these degenerate relatives, I am forced to admit the reality of this controversial figure. If one admits this, the biography of the ne'er-do-wells does not give rise to many difficulties. Whenever necessary, I shall expose the good-for-nothings, but I shall be more exuberant in singing the praise of the sterling qualities of the deserving members of the family.

Up to now I have not disclosed the family name, but think this is the time to disclose it. I have shouldered the heavy task of recording the history of the renowned family consisting of the functions characterized by functional equations. This saga is the outcome of a lecture held by me on 18 April, 1941 in a holiday-course of lectures on mathematics at the University of Groningen (Holland), entitled: „Elementary functions characterized by functional equations". I chose this title, because I intended to confine myself to a discussion of the virtuous members of the family only. Had I wanted to treat the unruly specimens, I might have chosen the title: „pathological functions, which have no importance for anybody, least of all for a teacher of mathematics." I have not decided in my own mind yet, which of the two titles is most likely to arouse interest. The reader may be assured that I did not present to my listeners all the members of the family who appear in this unvarnished and truthful account. I could not be so unkind to them, the listeners, not the relatives.

Wandering around I often encountered certain individuals without recognizing them as members of this illustrious family, but my interest in this family was first aroused by an article devoted by Dr. J. C. H. Gerretsen [1]) to the functional equation

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

---

[1]) J. C. H. Gerretsen, De karakteriseering van de goniometrische functies door middel van een functionaalvergelijking, Euclides **16** (1939), 92—99.
Compare: J. G. van der Corput, Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaalbetrekking, Euclides **17** (1940), 55—75.

Just so, you will say, I recognize this formula; it is the addition theorem of the cosine; the pair of functions $f(x) = \cos kx$ and $g(x) = \sin kx$, in which k is independent of x conforms with this relation.

All right, but there are more solutions. If f and g are two constants with the property $f = f^2 - g^2$, then the pair of functions, in which $f(x)$ is always equal to f and $g(x)$ always equal to g, provides another solution.

Excellent, but now we are coming to the main point: all other pairs of functions, for which Gerretsen's functional equation is valid, behave most irregularly. They belong to the unruly ne'er-do-wells. I call them pathological. A more complete pathography of their symptoms will follow later; I restrict myself now to the statement that they are discontinuous at every point. In particular I get the following result:

The pairs of functions $f(x) = \cos kx$ and $g(x) = \sin kx$, in which k is independent of x, are the only continuous, non-constant pairs of functions, which satisfy Gerretsen's functional equation for all real values of x and y.

The functions $f(x) = \cos kx$ and $g(x) = \sin kx$ are therefore characterized by the functional equation, if one adds the condition of continuity and non-constancy.

Once my attention had been riveted on the family, I also observed the other members, and lo, I stumbled on a surprising fact. In choosing his functional equation, Dr. Gerretsen was led by chance. Nevertheless, the method which leads to complete success in his equation, fails utterly in other functional equations, which at first sight look like a perfect analogy. I took the subtraction theorem of the cosine

$$f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

for the sister of the former, but it is not.

I could indicate all functions, for which this functional equation is valid, but I do not get there with the simple expedients which were amply sufficient for Gerretsen's functional equation. Also it appears that the result for the subtraction theorem is not quite so simple as for Gerretsen's. Hence it seemed necessary to work out a proper genealogical tree of the family.

The function $f(x) = \cos kx$ satisfies not only Gerretsen's relation but also the duplication formula

$$f(x) = 2f^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1.$$

Now, let us see where lies the characteristic difference between the two functional equations. In the first relation two variables occur, x and y, in the other one, x only.

In the duplication formula equality is required for every real x, but Gerretsen's functional equation demands much more, viz. the equality not only for every real x, but moreover for every real y.

In view of this I wish to distinguish between exacting and non-exacting functional equations, and that in the following manner:

If in a functional equation there is only one variable and if it is required, that the equation is valid for every value of this variable lying in a given interval, I call the equation non-exacting.

If in a functional equation there are two variables x and y, and if it is required that the functional equation is valid for every x lying in a given interval (a, b) and for every y lying in a given interval (c, d), then I call the equation exacting.

I could also nominate the functional equations, involving more than two variables, but this is not necessary in this exposal, and I presume, that an investigation of such equations can be reduced to an inquiry into the exacting functional equations.

The duplication formula is a non-exacting functional equation, where x lies in the interval $(-\infty, \infty)$. The addition and subtraction theorems of the cosine provide exacting equations, where both x and y lie in the said interval.

One is not apt to call exaction a fine trait of character, but in favour of the relations expressed by this unflattering name I must bring forward that they not only demand a lot, but that they give much too.

On the occasion when I had the privelege of making the acquaintance of Gerretsen's functional equation, I was struck by the fact that this one equation admirably characterizes the cosine and the sine as well. I am no longer overcome by this emotion, better still, my surprise at this has grown into another and much deeper feeling. Later on I shall have the pleasure to present to you a functional equation which by itself completely characterizes more than one hundred thousand functions at once. Needless to say that this is an exacting functional equation; a non-exacting could not have been equal to such powerful exertion. The limit to which a non-exacting equation can attain is the characterization of one function only. For instance, by

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) g\left(\frac{x}{2}\right)$$

neither $f(x)$ nor $g(x)$ is characterized; it is possible to choose $f(x)$ arbitrarily, provided that I take $f(x) = 0$ for every x so that $f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$; for such x I choose $g\left(\frac{x}{2}\right)$ arbitrarily and for the other values of x I put $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2f\left(\frac{x}{2}\right)}$; the pair of functions found in in this way satisfies the equation in question.

In the following chapter I intend to deal with a number of non-exacting functional equations. It is obvious from what I have said above that in each of them there will occur only one unknown function.

Chapter II.

One by one.

The title I chose for this chapter would be a new one if Herman Robbers, a wellknown Dutch author, had not used it many years ago.

It is my intention to discuss hereafter a number of functional equations taken from goniometry, all of which are non-exacting.

Characterization of the tangent.

The duplication formula of the tangent produces the functional equation

$$\boxed{f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - f^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

It is obvious that a function $f(x)$ is not characterised by the condition that it satisfies this relation in an interval $0 \leqq x \leqq b$, where b denotes a given positive number. In fact, we can choose the function $f(x)$ for $\frac{1}{2}b < x \leqq b$ quite arbitrarily; then we can determine $f(x)$ so that it satisfies in the interval $\frac{1}{4}b < x \leqq \frac{1}{2}b$ the formula

$$(f^2(x) - 1)f(2x) + 2f(x) = 0, \tag{1}$$

that is equivalent to the functional equation concerned and involves

the already established number $f(2x)$. If this number is 0 or $\pm i$, $f(x)$ has the same value and otherwise we have for $f(x)$ the choice between the two different roots of the quadratic equation (1). In a similar manner we can determine $f(x)$ in the interval $\frac{1}{4}b < x \leqq \frac{1}{2}b$, where again we have in general the choice between two different values, and so on. The functional equation reduces for $x = 0$ to $(f^2(0) - 1)f(0) + 2f(0) = 0$, hence $f(0) = 0$ or $\pm i$. Now if I take $f(0) = 0$ or $\pm i$, I have constructed a function $f(x)$ satisfying the functional equation in the interval $0 \leqq x \leqq b$ and assuming for $\frac{1}{2}b < x \leqq b$ arbitrarily prescribed values, so that it is not characterised by the functional equation. For the characterization we require therefore an additional condition. The condition that $f(x)$ possesses derivatives of all orders at all points of the interval $0 < x \leqq b$ does not help us, for even with this supplementary condition $f(x)$ is not characterised by the functional equation. In fact I will prove:

Let $b > 0$. Suppose that a is any number lying between $\frac{1}{2}b$ and b and that the function $F(x)$, assuming nowhere the value 0 or $\pm i$, possesses derivatives of all orders at all points of the interval $a \leqq x \leqq b$; then there exists a function $f(x)$, which satisfies the functional equation everywhere in the interval $0 \leqq x \leqq b$, which possesses derivatives of all orders at all points of the interval $0 < x \leqq b$ and which coincides for $a \leqq x \leqq b$ with the given function $F(x)$.

If $F(x)$ is real, $f(x)$ may also be chosen real.

To deduce these assertions I shall make use of the following three auxiliary propositions, the first of which we owe to Borel and is a special case of the second and the second of which is a special case of the third. In these auxiliary propositions $H(u)$ denotes a function with derivatives of all orders at all points $u \geqq 0$ such that [1])

---

[1]) For instance I can choose $H(u) = K \int_u^1 e^{-\frac{1}{v} - \frac{1}{1-v}} dv \quad (0 \leqq u \leqq 1)$,

where the constant K is defined by $H(0) = 1$. We have then for $0 < u < 1$

$$\frac{H(u) - H(0)}{u} = -\frac{K}{u} \int_0^u e^{-\frac{1}{v} - \frac{1}{1-v}} dv \to 0 \text{ if } u \to 0,$$

$$\frac{H(u) - H(1)}{u - 1} = -\frac{K}{1-u} \int_u^1 e^{-\frac{1}{v} - \frac{1}{1-v}} dv \to 0 \text{ if } u \to 1;$$

so that $H'(0) = H'(1) = 0$. Finally we have for every integer $m \geqq 0$

$$H^{(m+1)}(u) = -K \frac{d^m e^{-\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u}}}{du^m}$$

$$= e^{-\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u}} u^{-2m} (1-u)^{-2m} P_m(u),$$

$$H(0) = 1; \quad H^{(n)}(0) = 0 \ (n \geqq 1); \qquad H(u) = 0 \ (u \geqq 1) \quad \text{and} \quad 0 \leqq H(u) \leqq 1 \qquad (0 \leqq u \leqq 1). \qquad (2)$$

1. *If $g_0, g_1, \ldots$ are arbitrarily prescribed numbers, there exists a function $\varphi(x)$ which possesses derivatives of all orders at all points $x \geqq 0$ and which satisfies the relations*

$$\varphi^{(n)}(0) = g_n \qquad (n \geqq 0). \qquad (3)$$

If $g_n (n = 0, 1, \ldots)$ have real values, then so has $\varphi(x)$.

In fact, I put for $r = 1, 2, \ldots$

$$q = r + \frac{|g_2|}{2!} + \frac{|g_3|}{3!} + \ldots + \frac{|g_r|}{r!} \qquad (4)$$

$(q_1 = 1)$ and I shall show that the function

$$\varphi(x) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n!} x^n H(q_n x) \qquad (5)$$

possesses the required properties. We have $\varphi(0) = g_0$; the sum on the righthand side of (5) is for $x > 0$ a finite sum, since the terms such that $q_n x \geqq 1$ vanish.

If h is an integer $\geqq 0$, we can write $\varphi(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$, where

$$\Phi(x) = g_0 + \sum_{n=1}^{2h+2} \quad \text{and} \quad \Psi(x) = \sum_{n=2h+3}^{\infty}.$$

From (2) it follows that

$$\Phi^{(h)}(0) = g_h \quad \text{and} \quad \Phi^{(h+1)}(0) = g_{h+1},$$

therefore

$$\frac{\Phi^{(h)}(x) - g_h}{x} \to g_{h+1} \text{ if } x \to 0. \qquad (6)$$

Moreover we have

$$\Psi^{(h)}(x) = \sum_{\substack{n \geqq 2h+3 \\ q_n x \leqq 1}} \frac{g_n}{n!} \sum_{l=0}^{h} \binom{h}{l} \frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l} q_n^{h-l} H^{(h-l)}(q_n x).$$

In virtue of $n \leqq q_n \leqq \frac{1}{x}$ we have $0 < x \leqq 1$ and

---

where $P_m(u)$ is a polynomial in u; we have therefore

$$\frac{H^{(m)}(u)}{u} \to 0 \qquad \text{if } u \to 0$$

and

$$\frac{H^{(m)}(u)}{1-u} \to 0 \qquad \text{if } u \to 1,$$

hence

$$H^{(m+1)}(0) = H^{(m+1)}(1) = 0 \quad (m \geqq 0).$$

$$\frac{n!}{(n-l)!} x^{n-l} q_n^{h-l} \leqq n^l x^{n-l} x^{-(h-l)}$$

$$\leqq x^{-h} x^{n-l} x^{-(h-l)} = x^{n-2h} \leqq x^3,$$

hence

$$| \Psi^{(h)}(x) | \leqq Lx^3 \sum_{\substack{n \geqq 2 \\ q_n x \leqq 1}} \frac{|g_n|}{n!},$$

where L is independent of x. If no integer $n \geqq 2$ exists such that $q_n x \leqq 1$, we have $\Psi^{(h)}(x) = 0$. Otherwise we have, if r denotes the largest integer such that $q_r x \leqq 1$,

$$|\Psi^{(h)}(x)| \leqq Lx^3 \left\{ \frac{|g_2|}{2!} + \frac{|g_3|}{3!} + \ldots + \frac{|g_r|}{r!} \right\} < Lx^3 q_r$$

in virtue of (4), hence $| \Psi^{(h)}(x) | < Lx^2$.

Therefore $\frac{\Psi^{(h)}(x)}{x}$ tends with x to zero. In this manner we find in virtue of (6)

$$\frac{\varphi^{(h)}(x) - g_h}{x} \rightarrow g_{h+1},$$

if the positive number x tends to zero. This gives (3).

2. *Let $\delta > 0$, $a < b$ and suppose that $g_0, g_1, \ldots$ denote arbitrarily prescribed numbers. In the interval $a \leqq x \leqq b$ we can construct a function $\psi(x)$ which is in absolute value less than $| g_0 | + \frac{1}{3}\delta$ and whose derivatives of all orders exist for $a \leqq x \leqq b$ and satisfy the relations*

$$\psi^{(n)}(a) = g_n \qquad (n \geqq 0) \tag{7}$$

and

$$\psi^{(n)}(b) = 0 \qquad (n \geqq 0). \tag{8}$$

In fact, the preceding lemma gives a function $\omega(x) = \varphi(x - a)$ whose derivatives of all orders exist for $x \geqq a$ with the properties

$$\omega^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(0) = g_n \qquad (n \geqq 0) \tag{9}$$

If the positive number $\lambda \leqq b - a$ is small enough, we have for $a \leqq x \leqq a + \lambda$

$$| \omega(x) - g_0 | < \tfrac{1}{3}\delta,$$

therefore

$$| \omega(x) | < | g_0 | + \tfrac{1}{3}\delta.$$

The function

$$\psi(x) = \omega(x)\, H\left(\frac{x - a}{\lambda}\right)$$

possesses derivatives of all orders at all points $x \geqq a$ and is according to (2) absolutely less than $|g_0| + \frac{1}{3}\delta$; for $x \geqq a + \lambda$ it vanishes so that (8) is true and finally (7) follows from (9) and (2).

3. *Let $\alpha < \beta$ and $\delta > 0$. If $F(x)$ is continuous in the interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$, there exists a function $f(x)$ with derivatives of all orders in the said interval, such that*

$$f(\alpha) = F(\alpha); \quad f(\beta) = F(\beta); \quad |f(x) - F(x)| < \delta, \tag{10}$$

($\alpha \leqq x \leqq \beta$) and that all derivatives of $f(x)$ at α and at β assume arbitrarely prescribed values.

If the function $F(x)$ and the prescribed numbers assume real values, then so does $f(x)$.

The proof is simple. Since $F(x)$ is continuous, i. e. uniformly continuous in the interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$, we can divide this interval into two or more subintervals $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < \beta$ such that in each of these subintervals the oscillation of $F(x)$ is less than $\frac{1}{3}\delta$.

I determine first the function $f(x)$ in the interval $\alpha \leqq x \leqq \alpha_1$ in the following manner. By applying the preceding lemma with $a = \alpha$ and $b = \alpha_1$ we obtain in the said interval a function $\psi(x)$ satisfying the following four conditions (I) the derivatives of all orders of $\psi(x)$ exist at all points of the said interval (II) we have

$$\psi(\alpha) = F(\alpha) - F(\alpha_1); \quad \psi(\alpha_1) = 0$$

and

$$|\psi(x)| < |F(\alpha) - F(\alpha_1)| + \tfrac{1}{3}\delta \tag{11}$$

(III) each derivative of $\psi(x)$ assumes at the point α an arbitrarily prescribed value (IV) each derivative of $\psi(x)$ vanishes at the point α_1.

The function

$$f(x) = \psi(x) + F(\alpha_1) \quad (\alpha \leqq x \leqq \alpha_1)$$

assumes at α and also at α_1 the same value as the given function $F(x)$. Since $F(x)$ has an oscillation $< \frac{1}{3}\delta$ in the said interval, we have there

$$|F(x) - F(\alpha_1)| < \tfrac{1}{3}\delta,$$

particularly

$$|F(\alpha) - F(\alpha_1)| < \tfrac{1}{3}\delta.$$

Therefore we obtain in the interval $\alpha \leqq x \leqq \alpha_1$

$$|f(x) - F(x)| \leqq |\psi(x)| + |F(x) - F(\alpha_1)| < \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{1}{3}\delta = \delta$$

in virtue of (11). Thus the interval $\alpha \leqq x \leqq \alpha_1$ is done with.

The function $f(x)$, defined in the interval $\alpha_\mu \leqq x \leqq \alpha_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m - 1$) by

$$f(x) = F(\alpha_{\mu+1}) + (F(\alpha_\mu) - F(\alpha_{\mu+1}))H\left(\frac{x-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}\right)$$

possesses derivatives of all orders at all points of this interval and satisfies according to (2) the relations

$$|f(x)-F(x)| \leqq |F(\alpha_{\mu+1})-F(x)|+|F(\alpha_\mu)-F(\alpha_{\mu+1})| < \tfrac{1}{3}\delta+\tfrac{1}{3}\delta<\delta;$$

moreover

$$f(\alpha_\mu) = F(\alpha_\mu);\ f(\alpha_{\mu+1}) = F(\alpha_{\mu+1})$$

and

$$f^{(n)}(\alpha_\mu) = f^{(n)}(\alpha_{\mu+1}) = 0 \qquad (n \geqq 1).$$

Finally, I treat the last interval $\alpha_m \leqq x \leqq \beta$ in the same manner as the first; I construct in this interval a function $f(x)$ possessing the following four properties: (I) the derivatives of all orders exist at all points of the said interval (II) we have

$$|f(x) - F(x)| < \delta \qquad (\alpha_m \leqq x \leqq \beta).$$

(III) moreover we have

$$f(\alpha_m) = F(\alpha_m);\ f(\beta) = F(\beta);\ f^{(n)}(\alpha_m) = 0 \qquad (n \geqq 1).$$

(IV) $f^{(n)}(\beta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ assume arbitrarily prescribed values.

In this manner we have constructed in the interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ a function $f(x)$ possessing the required properties. If the given function $F(x)$ and the prescribed values of the derivatives at α and β are real, all functions occurring in this argument, in particular $f(x)$, are real.

Let us now return to our functional equation. To prove my assertion concerning this equation I have to construct a function $f(x)$ possessing particular properties in the interval $0 < x \leqq b$. For that purpose I choose between $\frac{1}{2}b$ and a an arbitrary number α and I put $\beta = 2\alpha$, so that $\beta > b$.

Consider now the given function $F(x)$, that nowhere assumes one of the values, 0, i and $-i$.

If $F(x)$ is real, it is either always positive or always negative and then I define $F(\alpha)$ as the number τ possessing the same sign and satisfying the quadratic equation

$$(\tau^2 - 1)\,F(b) + 2\tau = 0. \tag{12}$$

In that case I choose the continuous real function $F(x)$, that is already defined at the end points α and a, arbitrarily in the whole interval $\alpha \leqq x \leqq a$, but so that it possesses there everywhere the same sign as in a (and so as in α).

If $F(x)$ is not a real function, I define $F(\alpha)$ as one of the roots τ of the quadratic equation (12); $F(b)$, therefore $F(\alpha)$ too, is different from each of the numbers 0, i and $-i$. In this case I choose the continuous function $F(x)$, that is already defined at the end points α and a, arbitrarily in the whole interval $\alpha \leqq x \leqq a$, but so that it assumes nowhere in the said interval one of the three values 0, i and $-i$.

In both cases we have constructed for $\alpha \leqq x \leqq a$ a continuous function $F(x)$ satisfying the inequalities

$$| F(x) | > \delta, \quad | F(x) - i | > \delta \text{ and } | F(x) + i | > \delta,$$

if the positive number δ is small enough.

The third lemma, applied with a in place of β, gives for $\alpha \leqq x \leqq a$ a function $f(x)$ possessing the following four properties: (I) the derivatives of $f(x)$ of all orders exist at all points of the said interval (II) we have

$$f(\alpha) = F(\alpha); \; f(a) = F(a); \; f^{(n)}(\alpha) = 0 \quad (n \geqq 1).$$

(III) each derivative of $f(x)$ at a is equal to the corresponding right-hand derivative of $F(x)$ at that point (IV) we have for $\alpha \leqq x \leqq a$

$$| f(x) - F(x) | < \delta.$$

Hence $f(x)$ assumes nowhere in the interval $\alpha \leqq x \leqq a$ one of the values 0, i and $-i$.

In the interval $b \leqq x \leqq \beta$ I put $F(x) = F(b)$ and in a similar manner as in $\alpha \leqq x \leqq a$ I construct in the interval $b \leqq x \leqq \beta$ a function $f(x)$ possessing the following four properties: (I) the derivatives of $f(x)$ of all orders exist at all points of the interval $b \leqq x \leqq \beta$. (II) we have

$$f(\beta) = F(\beta); \; f(b) = F(b); \; f^{(n)}(\beta) = 0 \quad (n \geqq 1).$$

(III) each derivative of $f(x)$ at b is equal to the corresponding left-hand derivative of $F(x)$ at that point (IV) $f(x)$ assumes nowhere in the interval $b \leqq x \leqq \beta$ one of the three values 0, i and $-i$.

Finally I put $f(x) = F(x)$ for $a \leqq x \leqq b$.

It is clear that the derivatives of $f(x)$ of all orders exist at all points of the whole interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ and that

$$f^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\beta) = 0 \quad (n \geqq 1);$$

moreover $f(\alpha) = F(\alpha)$ is one of the roots τ of the quadratic equation that we obtain by putting $x = \frac{1}{2}\beta$ in

$$(\tau^2 - 1) f(2x) + 2\tau = 0. \tag{13}$$

$f(2x)$ is a continuous function of x in the interval $\frac{1}{2}\alpha \leqq x \leqq \frac{1}{2}\beta$ and does not assume one of the values 0, i and $-i$. The quadratic equation (13) possesses therefore two different roots

$$\tau = -\frac{1}{f(2x)} \pm \sqrt{\frac{1}{f^2(2x)} + 1},$$

where the sign can be chosen so that τ is a continuous function of x in the said interval; this continuous function τ is defined in the whole interval $\frac{1}{2}\alpha \leqq x \leqq \frac{1}{2}\beta$ by the condition that it assumes the value $f(\alpha)$ at the point $\frac{1}{2}\beta$. I define $f(x)$ in the said interval as this continuous function τ; this is permissible since $f(x)$ and τ assume at $\frac{1}{2}\beta$ the same value $f(\alpha)$.

From this definition it follows that $f(x)$ possesses derivatives of all orders at all points of the interval $\frac{1}{2}\alpha \leqq x \leqq \frac{1}{2}\beta$ and that $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 1)$ can be written as a sum of terms of the form

$$T(x)\,\{f'(2x)\}^{\mu_1}\,\{f''(2x)\}^{\mu_2}\ldots\{f^{(n)}(2x)\}^{\mu_n},$$

where the exponents are $\geqq 0$ and satisfy the relation

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n = n$$

and $T(x)$ denote a finite function of x. At the point $x = \frac{1}{2}\beta$ all derivatives of $f(2x)$ vanish, so that all left-hand derivatives of $f(x)$ at that point assume the value zero. Each right-hand derivative of that function at the point vanishing too, $f(x)$ possesses derivatives of all orders at $\frac{1}{2}\beta$, therefore at all points of the interval $\frac{1}{2}\alpha \leqq x \leqq \beta$. Similarly we define $f(x)$ in the interval $\frac{1}{4}\alpha \leqq x \leqq \frac{1}{4}\beta$, further in the interval $\frac{1}{8}\alpha \leqq x \leqq \frac{1}{8}\beta$, and so on. Ultimately I put $f(0) = 0$.

The thus defined function $f(x)$ satisfies the functional equation at the origin and also at all points of the interval $0 < x \leqq b$, for in the interval $0 < x \leqq \frac{1}{2}b$ $\tau = f(x)$ satisfies the relation (13), which is equivalent to the functional equation. Moreover the derivatives of $f(x)$ of all orders exist at all points of the interval $0 < x \leqq b$; for $a \leqq x \leqq b$ the two functions $f(x)$ and $F(x)$ coincide.

If $F(x)$ is real, everything in this mode of proof is real, hence $f(x)$ too.

This establishes that the constructed function $f(x)$ possesses the required properties.

The condition that $f(x)$ possesses derivatives of all orders at all points of the interval $0 < x \leqq b$ is therefore not sufficient to characterise the function by means of the functional equation. Even the additional condition that $f(x)$ is continuous at the origin

does not help us. For if $F(x)$ is real in the interval $a \leqq x \leqq b$, then the constructed function $f(x)$ is real, continuous and $\neq 0$ for $0 < x \leqq b$ and has therefore a permanent sign. In virtue of the functional equation we find

$$0 < 1 - f^2(x) < 1 \text{ and } \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \tfrac{1}{2} \, | f(x) |.$$

This proves that the constructed function $f(x)$ tends with x to zero and is continuous at the origin.

All this is very sad indeed; the fault is, we were betting on the wrong horse. The condition that the function possesses derivatives of all orders at all points of the interval $0 < x \leqq b$ leaves us in the lurch. We must confine our attention to the origin. The function is characterised indeed by the functional equation, if it is differentiable at the origin. For here the following memorable and gratifying fact proves to be true:

Let $b > 0$. The functions tg kx, where k is independent of x, are the only functions $f(x)$, differentiable and vanishing at the origin, that satisfy the functional equation concerned in the interval $0 \leqq x \leqq b$.

In fact, if the positive number x is small enough, $f(x)$ is approximately equal to zero. Hence there exists a positive number $\beta \leqq b$ such that $f(x)$ differs from i and also from $-i$ in the interval $0 \leqq x \leqq \beta$. In this interval there exists a continuous function $\varphi(x)$ such that

$$f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) \tag{14}$$

and $\varphi(0) = 0$. For $0 < x \leqq \beta$ we have

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\operatorname{tg} \varphi(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x},$$

if $\dfrac{\operatorname{tg} \varphi(x)}{\varphi(x)}$ is defined as 1 at the points whereat $\varphi(x) = 0$. As x tends to zero,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

tends to the limit $f'(0)$, say k. Further $\varphi(x)$ tends to zero, therefore $\dfrac{\operatorname{tg} \varphi(x)}{\varphi(x)}$ to 1. Hence $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ tends to k and we may write

$$\varphi(x) = kx + x\varepsilon(x), \tag{15}$$

where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero.

By substituting (14) into the given functional equation we find

$$\operatorname{tg} \varphi(x) = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

and therefore

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \pi h(x),$$

where $h(x)$ is an integer. Formula (15) gives for $0 < x \leqq \beta$

$$x\varepsilon(x) = x\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \pi h(x).$$

From this it follows that the integer $h(x)$ tends with x to zero and vanishes therefore in the vicinity of the origin. Hence there exists a positive number $\gamma \leqq \beta$, such that $h(x)$ vanishes and $\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)$ in the interval $0 < x \leqq \gamma$.

Very fine, now we have got rid of $h(x)$. Still better, at one blow we get rid of $\varepsilon(x)$ too. In fact, for $0 < x \leqq \gamma$ we have found

$$\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{x}{2^2}\right) = \dots$$

and we know also that $\varepsilon\left(\frac{x}{2^q}\right)$ tends to zero, if q be increased indefinitely. Hence for $0 < x \leqq \gamma$

$$\varepsilon(x) = 0 \text{ and } \varphi(x) = kx$$

and therefore

$$f(x) = \operatorname{tg} kx \qquad (16)$$

This formula is also true at the origin.

Now I let the cat out of the bag. Formula (16) is valid not only in the interval $0 \leqq x \leqq \gamma$, but also for the non-negative numbers $x \leqq b$ and $\leqq 2\gamma$. In fact, for such x we have $f\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}kx$ and according to the functional equation

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}kx}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}kx} = \operatorname{tg} kx.$$

Similarly we find that (16) is true for the non-negative numbers $x \leqq b$ and $\leqq 4\gamma$, and so on. In short, (16) is valid for every now-negative $x \leqq b$, which establishes the theorem.

If we put $x = 0$, the functional equation reduces to

$$f(0) = \frac{2f(0)}{1 - f^2(0)},$$

hence $f(0) = 0$ of $\pm i$. For the solutions that assume at the origin the value $\pm i$, the condition of differentiability at the origine may be replaced by the less exacting condition of continuity at the origin, as follows from the next theorem.

Let $b > 0$. The function that is equal to the constant i is the only function $f(x)$ that is continuous at the origin and assumes at that point the value i and satisfies the functional equation for $0 \leqq x \leqq b$.

In this assertion i may be replaced by $-i$.

I will now consider the case $f(0) = i$. If I write $f(x) = i + \varepsilon(x)$, where $\varepsilon(x)$ tends with x to zero, the functional equation becomes

$$\varepsilon(x) = \frac{i\varepsilon^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 - 2i\,\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) - \varepsilon^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

In the vicinity of the origin the denominator is approximately equal to 2 and the absolute value of $\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)$ is less than 1, hence

$$|\,\varepsilon(x)\,| < \left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

and therefore

$$|\,\varepsilon(x)\,| < \left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right)\right| < \ldots$$

Here again $\varepsilon\left(\frac{x}{2^q}\right)$ tends to zero, if q be increased indefinitely so that in the said vicinity $\varepsilon(x) = 0$ and $f(x) = i$. Hence there exists a positive number $\gamma \leqq b$ such that $f(x)$ possesses the value i for $0 \leqq x \leqq \gamma$. From the functional equation it now follows that the formula $f(x) = i$ is true also for the non-negative numbers $x \leqq b$ and $\leqq 2\gamma$, for the non-negative numbers $x \leqq b$ and $\leqq 4\gamma$, and so on, i.e. for all non-negative $x \leqq b$. This proves the theorem in the case $f(0) = i$ and by replacing i by $-i$, we obtain the case $f(0) = -i$.

To be continued.